

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΛΟΓΙΑ

Χρήστος Β. Μάντζος

ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής

του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών

ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση

Μεταπτυχιακού Διπλώματος

Ειδίκευσης στη Στατιστική

Αθήνα,
Ιούλιος, 2014

Στον πατέρα μου Βασίλη και

στη μητέρα μου Σωτηρία

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΛΟΓΙΑ

Περίληψη

Έννοιες όπως στοχαστικό ολοκλήρωμα, οδεύων κύμα και ιδιότητες Martingale μας βοηθούν στο να κατανοήσουμε αρκετά βιολογικά φαινόμενα, και όχι μόνο. Επίσης, βασιζόμενοι κατά το μεγαλύτερο μέρος της θεωρίας στο ολοκλήρωμα του Itό, θα μελετήσουμε πως με κατάλληλες αναλύσεις οι έννοιες αυτές δίνουν λύσεις σε αντίστοιχα προβλήματα που εμφανίζονται στον τομέα της βιοιατρικής. Το σημείο που θα δώσουμε έμφαση είναι η διαδεδομένη ύπαρξη των φαινομένων κυμάτων στις βιοϊατρικές επιστήμες, που απαιτεί μελέτη των κυμάτων που ταξιδεύουν σε βάθος και η μοντελοποίηση και ανάλυση τους. Θα ασχοληθούμε, επίσης, με διάφορες πτυχές της συμπεριφοράς κυμάτων όπου η διάχυση παίζει καθοριστικό ρόλο. Μεταξύ των άλλων, θα αναλύσουμε κάτι που είναι πλέον αποδεκτό ως μέρος της βασικής θεωρίας στον τομέα και περιγράφει πρακτικά προβλήματα, όπως την πρόοδο και τη συμπεριφορά κυμάτων μιας μόλυνσης.

Περιεχόμενα

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ 6

1.1 Βασικές έννοιες 6

1.2 Ιδιότητα Markov 7

1.3 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα 9

1.3.1 Ολοκλήρωμα του Itό και ιδιότητες 11

1.3.2 Ιδιότητα Martingale του ολοκληρώματος του Itό 12

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΙΤΟ 14

2.1 Λογισμός του Itό 14

2.2 Λήμμα του Itό 16

2.3 Διαδικασία του Itό και ο τύπος του Itό σε γενική μορφή 21

2.3.1 Γενίκευση του ολοκληρώματος Itό για Martingales 21

2.4.1 Υπολογισμός στοχαστικού ολοκληρώματος 22

2.4.2 Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις 23

2.4.3 Ημιομάδες και γεννήτορες τελεστές 26

2.4.4 Η αναπαράσταση των Feynman-Kac 29

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΛΟΓΙΑ 31

3.1 Εξισώσεις διάχυσης 31

3.2 Οδεύων κύμα 32

3.3 Πρότυπα διάχυσης-αντίδρασης με συνάρτηση διάχυσης που εξαρτάται από την πυκνότητα 33

3.4 Εισαγωγή στα πρότυπα μορίων 37

3.5 Διάχυση και διασπορά 37

3.5.1 Μοριακή διάχυση 37

3.5.2 Η μοριακή διάχυση με σταθερό συντελεστή διάχυσης 37

3.5.3. Διάδοση μάζας μόλυνσης σε υγρό 41

3.5.4 Ασυμπτωτική ανάλυση περιοδικών δομών 42

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 44

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 47

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1.1 Βασικές έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με τους ορισμούς και τις ιδιότητες κάποιων βασικών εννοιών και θεωρημάτων πάνω στα οποία θα στηριχτούμε για να διατυπώσουμε και να κατανοήσουμε τις εφαρμογές τους στα παρακάτω κεφάλαια. Ας δώσουμε λοιπόν, αρχικά, κάποιες βασικές έννοιες.

Έστω (Ω,F,P) ένας χώρος πιθανότητας. Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση X: $[0,+\infty)\text{x}\Omega \to \Re^d$.

Ειδικότερα

a) Για κάθε $t \in [0,\infty)$, η απεικόνιση $X(t,.): \Omega \to \Re^d$ είναι μια τυχαία μεταβλητή
b) Για κάθε $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $X(.,\omega)$: $[0,+\infty) \to \Re^d$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση που ονομάζεται δειγματικό μονοπάτι (sample path).

Για συντομία η τυχαία μεταβλητή X(t,.) θα γράφεται σαν X(t) ή X_t

Ορισμός (1.1) (Κίνηση Brown)

Μια στοχαστική διαδικασία B: $[0,+\infty) \to \Re$ ονομάζεται κίνηση Brown εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) $P\{\omega; B(0,\omega) = 0\} = 1$

2) Για κάθε s τέτοιο ώστε $0 \le s \le t$,η τυχαία μεταβλητή
B(t) - B(s) ~ N(0,t-s) δηλαδή ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση t - s
Συνεπώς για a < b

$$P\{a \le B(t) - B(s) \le b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{\frac{-x^2}{2(t-s)}} dx$$

3) Η B έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις δηλαδή
για κάθε $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές
$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες.

4) Σχεδόν όλα τα μονοπάτια της είναι συνεχείς συναρτήσεις δηλαδή

$$P\left\{\begin{matrix}\omega; B(\cdot,\omega) \text{είναι} \\ \text{συνεχής}\end{matrix}\right\} = 1$$

Σχόλιο (1.2)
Μια κίνηση Brown σε κάποιες περιπτώσεις ορίζεται ως στοχαστική διαδικασία B(t,ω) αν ικανοποιεί τις ιδιότητες (1),(2),(3) του παραπάνω ορισμού.
Μια τέτοια στοχαστική διαδικασία έχει πάντα συνεχή πραγματοποίηση δηλαδή υπάρχει Ω τέτοιο ώστε P(Ω)=1 και για κάθε ω $\in \Omega$ η B(t,ω) είναι μια συνεχής συνάρτηση του t.

1.2 Ιδιότητα Markov

Η κίνηση Brown ικανοποιεί την ιδιότητα Markov δηλαδή για κάποιο $s \geq 0$ η $B_{t+s} - B_s$ είναι μια κίνηση Brown που δεν εξαρτάται από το τι συνέβη πριν τη χρονική στιγμή s (ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $F_s = \sigma(B_u : u \in [0,s])$).
Γνωρίζουμε όμως από τον ορισμό της κίνησης Brown ότι η $B_{t+s} - B_s$ είναι μια κίνηση Brown με μέση τιμή 0 και διασπορά (t+s)-s=t, πράγμα που σημαίνει ότι τελικά είναι μια κίνηση που ξεκινά στο 0 και τρέχει για χρόνο t.Η ιδιότητα Markov για την κίνηση Brown μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε ορισμένους τύπους για την υπό συνθήκη μέση τιμή.
Έστω $F_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown ως τη χρονική στιγμή s, η οποία σ-άλγεβρα είναι η μικρότερη για $r \leq s$ και η B_t τυχαία μεταβλητή είναι μετρήσιμη.
Δηλαδή η $F_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ περιέχει όλη την πληροφορία για την κίνηση ως τη χρονική στιγμή s.

Αν η f είναι φραγμένη συνάρτηση τότε για κάθε $x \in R^d$ ισχύει

$$E_x[f(B_{t+s} - B_s)/F_s] = E_x[f(B_{t+s} - B_s)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

λόγω της ανεξαρτησίας των μεταβολών της κίνησης Brown δηλαδή έχουμε

$$E_x[f(B_{t+s})/F_s] = E_x[f(B_{t+s} - B_s + B_s)/F_s]$$

και εφόσον το $B_{t+s} - B_s$ είναι ανεξάρτητο της σ-άλγεβρας και το γνωστό ως τη στιγμή s μπορούμε με δεδομένο ότι $B_s = z$ να έχουμε

$$E_x[f(B_{t+s} - B_s + B_s)/F_s] = E_x[f(B_{t+s} - B_s + z)]$$

Το $B_{t+s} - B_s$ είναι επίσης μια κίνηση που ξεκινά στο 0 και τρέχει για t+s-s=t οπότε η διαδικασία $B_{t+s} - B_s + z$ έχει την ίδια κατανομή με μια κίνηση που ξεκινά στο z και τρέχει για χρόνο t.

Άρα θα έχουμε

$$E_x\left[f\left(B_{t+s}-B_s+z\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y+z)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)dy=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(y-z)^2}{2t}\right)dy=E_z\left[f\left(B_t\right)\right]=E_{B_s}\left[f\left(B_t\right)\right]$$

Οπότε λοιπόν θα έχουμε την έκφραση της ιδιότητας Markov για την κίνηση Brown,ως ακολούθως

$$E_x\left[f\left(B_{t+s}\right)/F_s\right]=\mathrm{E}_{B_s}\left[f\left(B_t\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{\left(y-B_s\right)^2}{2t}\right)dy$$

Οι σχέσεις που εκφράζουν την ιδιότητα Markov ως προς τις μέσες τιμές γράφονται ισοδύναμα και ως σχέσεις για πιθανότητες, αν επιλέξουμε τη δείκτρια συνάρτηση του συνόλου αντί για την f θα έχουμε

$$P_x\left[\left(B_{t+S}\right)\in A/F_s\right]=P_{B_s}\left[\left(B_t\in A\right)\right]$$ όπου Α σύνολο Borel.

Ορισμός (1.3)
Αν θεωρήσουμε Τ ένα οποιοδήποτε διάστημα του χώρου των πραγματικών αριθμών ή ένα σύνολο θετικών ακέραιων αριθμών τότε ένα φίλτρο του Τ είναι μια αύξουσα οικογένεια $\{F_t/t\in T\}$ από σ-άλγεβρες.

Μία στοχαστική διαδικασία $X_t, t\in T$ λέγεται ότι είναι προσαρμοσμένη στο φίλτρο $\{F_t/t\in T\}$ για κάθε t, η τυχαία X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη

Έστω B(t) μια κίνηση Brown και το φίλτρο $\{\mathcal{F}_t; a\le t\le b\}$ τέτοιο ώστε

a) Για κάθε t, B(t) είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη
b) Για οποιοδήποτε $s\le t$, η τυχαια μεταβλητή $B(t)-B(s)$ είναι ανεξάρτητη του σ-χώρου $\mathcal{F}_s$

Θα δείξουμε ότι μια κίνηση Brown B(t) είναι Martingale.
Έστω $\mathcal{F}_t=\sigma\{B(s); s\le t\}$.
Τότε για κάθε $s\le t$ ισχύει,

$$E\{B(t)|\mathcal{F}_s\}=E\{B(t)-B(s)|\mathcal{F}_s\}+E\{B(s)|\mathcal{F}_s\}$$

Όμως το $B(t)-B(s)$ είναι ανεξάρτητο του $\mathcal{F}_s$ οπότε έχουμε
$E\{B(t)-B(s)|\mathcal{F}_s\}=E\{B(t)-B(s)\}$.

Όμως E(B(t))=0 για κάθε t οπότε $E\{B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s\} = 0$.
Επίσης $E\{B(s)|\mathcal{F}_s\} = B(s)$ αφού $B(s)$ είναι $\mathcal{F}_s$–μετρήσιμη.
Οπότε $E\{B(t)|\mathcal{F}_s\} = B(s)$ για κάθε s ≤ t άρα η B(t) είναι Martingale.

1.3 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα

Θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_\alpha^b f(t)dB(t)$ για τη στοχαστική ανέλιξη $f(t,\omega)$ κάτω απ'τις ακόλουθες προυποθέσεις

1) $f(t)$ είναι προσαρμοσμένη στο φίλτρο $\{\mathcal{F}_t\}$
2) $\int_\alpha^b |f(t)|^2 dt < \infty$ σχεδόν βέβαια

Το σύνολο των στοχαστικών διαδικασιών f που ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες θα συμβολίζεται με $L_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$

Σημείωση (1.4)
Θα χρησιμοποιήσουμε $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ για να δηλώσουμε τις $\{\mathcal{F}_t\}$ −προσαρμοσμένες στοχαστικές διαδικασίες $f(t,\omega)$ με
$\int_a^b E(|f(t)|^2)dt < \infty$.
Σύμφωνα με το θεώρημα του Fubini έχουμε τη σχέση

$$L^2_{ad}([a,b]\times\Omega) \subset L_{ad}(\Omega, L^2[a,b]).$$

Η 2η προυπόθεση μας δείχνει πως σχεδόν όλα τα δειγματικά μονοπάτια είναι συναρτήσεις στο χώρο Hilbert $L^2[a,b]$ έτσι ώστε w→ $f(\cdot,w)$ να είναι μετρήσιμη συνάρτηση από το Ω στο $L^2[a,b]$.

Έστω $f \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$.
Θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$\int_\alpha^b f(t)dB(t).$$

Αρχικά θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα για ένα ειδικό υποσύνολο του $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ που ονομάζεται διαδικασία βήματος και είναι της μορφής

$$f(t,w) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(w)\cdot 1_{[t_{i-1},t_i)}(t)$$

όπου ξ_{i-1} είναι $F_{t_{i-1}}$-μετρήσιμη και $E(\xi^2_{i-1}) < \infty$.
Ορίζουμε λοιπόν

$$I(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})),$$

για το οποίο έχουμε το παρακάτω.

Λήμμα (1.5)
Για τη $I(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))$ ισχύουν τα εξής

1) $E\big(I(F)\big) = 0$
2) $E(|I(f)|^2) = \int_a^b E(|f(t)|^2)dt.$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε ένα λήμμα προσέγγισης για να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_a^b f_t dB_t$ για κάθε στοχαστική διαδικασία $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$.

Λήμμα (1.6)
Έστω $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Υπάρχει ακολουθία διαδικασίας βήματος $\{f_n(t); n \geq 1\}$ τετοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E\{|f(t) - f_n(t)|^2\}dt = 0 \qquad (1.1.1)$$

Η ακολουθία του ολοκληρώματος για την f, ακολουθεί το όριο της $I(f_n)$. Πράγματι από την ισότητα (2) του λήμματος (1.5).
Σύμφωνα με το Λήμμα (1.6) έχουμε μια ακολουθία $\{f_n(t,w); n \geq 1\}$ μιας προσαρμοσμένης στοχαστικής διαδικασίας τέτοια ώστε να επαληθεύει την ισότητα (1.1.1).για κάθε n και $I(f_n)$ απ΄το Λήμμα (1.6) έχουμε

$$E(|I(f_n) - I(f_m)|^2) = \int_a^b E(|f_n(t) - f_m(t)|^2)dt \to 0 \ \ \gamma\iota\alpha\ n \to \infty, m \to \infty$$

οπότε η ακολουθία $\{I(f_n)\}$ είναι Cauchy ακολουθία στον $L^2(\Omega)$ και ορίζουμε

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$$

Το $I(f)$ είναι λοιπόν καλά ορισμένο.
Θα δείξουμε ότι το όριο είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της ακολουθίας $\{f_n\}$.
Έστω $\{g_m\}$ ακολουθία τέτοια ώστε $g_m \to f \ \ \sigma\tau o\ L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$.

$$E(I(f_n) - I(g_m)|^2) = E(|f_n - g_m|^2) = \int_a^b (f_n(t) - g_m(t))^2\, dt =$$

$$= \int_a^b [\big(f_n(t) - f(t)\big) - \big(g_m(t) - f(t)\big)]^2 dt \leq$$

$$\leq 2\int_a^b [(f_n(t) - f(t))^2 + (g_m(t) - f(t))^2]dt \to 0 \ \ \gamma\iota\alpha\ n \to \infty, m \to \infty.$$

Λόγω της ανίσωσης $(x-y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$.

Άρα $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{m\to\infty} I(g_m)$ στον $L^2(\Omega)$.

1.3.1 Ολοκλήρωμα του Itό και ιδιότητες

Ορισμός (1.7)
Έστω $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Το όριο $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$ ονομάζεται ολοκλήρωμα του Itό και συμβολίζεται ως $\int_\alpha^b f(t)dB(t)$.

Θα αναφέρουμε παρακάτω και θα μελετήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Itό όπως η γραμμικότητα, η ισομετρία, η ιδιότητα Martingale καθώς και η ιδιότητα της συνέχειας
Θεώρημα (1.8)
Το ολοκλήρωμα του Itό έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

- Έστω $a, b \in \mathcal{R}$ $και$ $f, g \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ το I(f) είναι γραμμικό. δηλαδή $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$
- Είναι μια τυχαία μεταβλητή με $E\big(I(f)\big) = 0$ και
- $E(|I(f)|^2) = \int_a^b E(|f(t)|^2)dt$

Η τρίτη ισότητα δηλώνει πως το ολοκλήρωμα του Itό αν το θεωρήσουμε ως μια απεικόνιση $I: L^2_{ad}([a,b] \times \Omega) \to L^2(\Omega)$ είναι ισομετρία

Απόδειξη
Έστω f μια διαδικασία βήματος

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} \xi(t_{i-1})D_i$$

για $D_i = B(t_i) - B(t_{i-1})$ με αναμενόμενη τιμή 0 τα D_i, D_j ανεξάρτητα για κάθε i < j.
Παρατηρούμε ότι

$$I^2(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi(t_{i-1})D_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi^2(t_{i-1})D_i^2 + 2\sum_{j<i} \xi(t_i)\xi(t_j)D_jD_i$$

Οι μη διαγώνιοι όροι λόγω της ανεξαρτησίας έχουν αναμενόμενη τιμή 0 άρα

$$E[I^2(f)] = \sum_{i=1}^{n} E[\xi^2(t_{i-1})D_i^2] = \sum_{i=1}^{n} E[\xi^2(t_{i-1})E[(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \ |F_{t_{i-1}}]]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} E[\xi^2(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})] = E\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \xi^2(u)du = E\left(\int_1^t \xi^2(u)du\right)$$

Για να δείξουμε την ισομετρία για οποιαδήποτε $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ αρκεί να προσεγγίσουμε την f με μια ακολουθία $f_n \to f$, f_n διαδικασία βήματος και να πάρουμε το όριο. □

Σχόλιο (1.9)
Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g για τις οποίες $f, g \in L_{ad}^2([a,b] \times \Omega)$ ισχύει η ακόλουθη ισότητα

$$E\left(\int_a^b f(t)dB(t) \int_a^b g(t)dB(t)\right) = \int_a^b E(f(t)g(t))dt$$

1.3.2 Ιδιότητα Martingale του ολοκληρώματος του Itό

Θεώρημα (1.10)
Έστω μια συνάρτηση $f \in {L_{ad}}^2([a,b] \times \Omega)$.Τότε η στοχαστική ανέλιξη

$$X_t = \int_a^t f(s)dB(s)\,, \quad a \le t \le b$$

είναι Martingale ως προς το $\{\mathcal{F}_t : a \le t \le b\}$.

Θεώρημα (1.11)
Έστω μια συνάρτηση $f \in {L_{ad}}^2([a,b] \times \Omega)$.Τότε η στοχαστική ανέλιξη

$$X_t = \int_a^t f(s)dB(s)\,, \quad a \le t \le b$$

είναι συνεχής δηλαδή σχεδόν όλα τα τυχαία μονοπάτια της είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [a,b].

Απόδειξη
Πρώτα ας υποθέσουμε ότι η f είναι μια στοχαστική διαδικασία βήματος

$$f(s,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega) 1_{(t_{i-1},t_i]}(s)$$

όπου ξ_{i-1} είναι $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$–μετρήσιμη συνάρτηση και οπότε για κάποιο $w \in \Omega$,το μονοπάτι της X_t είναι

$X_t(w) = \sum_{i=1}^{k-1} \xi_{i-1}(w)(B(t_i,w) - B(t_{i-1},w)) + \xi_{k-1}(w)(B(t,w) - B(t_{k-1},w))$,
για $t_{k-1} \le t \le t_k$.

Εφόσον λοιπόν για σχεδόν όλα τα w, η κίνηση Brown B(·,w) είναι συνεχής τότε θα έχουμε και για σχεδόν όλα τα w και ότι η $X_{(\cdot)}(w)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [a, b].

Εάν τώρα $f \in {L_{ad}}^2([a,b] \times \Omega)$ και $\{f_n\}$ μια ακολουθία διαδικασιών βήματος τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E(|f(s) - f_n(s)|^2)ds = 0$$

Μπορούμε επιλέγοντας μια κατάλληλη υπακολουθία (την οποία συμβολίζουμε για ευκολία με τον ίδιο τρόπο) να υποθέσουμε ότι

$$\int_a^b E(|f(s)-f_n(s)|^2)ds \le \frac{1}{n^6}\,,\quad \forall n \ge 1$$

Για κάθε n λοιπόν ας ορίσουμε τη στοχαστική διαδικασία

$$X_t^{(n)} = \int_a^t f_n(s)dB(s)\,,\quad a \le t \le b$$

Όπως είπαμε προηγουμένως σχεδόν όλα τα τυχαία μονοπάτια της $X_t^{(n)}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Επίσης X_t και $X_t^{(n)}$είναι Martingales οπότε και $X_t - X_t^{(n)}$ είναι Martingale και από την ανισότητα Doob submartingale (παράρτημα) έχουμε

$$P\left\{\max_{a\le t\le b}\left|X_t - X_t^{(n)}\right| \ge \frac{1}{n}\right\} \le nE\left|X_b - X_b^{(n)}\right|$$

Από την ανισότητα Schwarz προκύπτει εύκολα ότι

$$E\left|X_b - X_b^{(n)}\right| \le \left(E\left|X_b - X_b^{(n)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b E(|f(s)-f_n(s)|^2)ds\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{n^3}$$

Δηλαδή για κάθε n≥1 ισχύει

$$P\left\{\max_{a\le t\le b}\left|X_t - X_t^{(n)}\right| \ge \frac{1}{n}\right\} \le \frac{1}{n^2}$$

Εφόσον $\sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$, από το Λήμμα των Borel-Cantelli έχουμε

$$P\left\{\max_{a\le t\le b}\left|X_t - X_t^{(n)}\right| \ge \frac{1}{n}, απείρως\ συχνά\right\} = 0$$

Αν πάρουμε το συμπλήρωμα των ενδεχομένων $\{A_n\ απείρως\ συχνά\}$ θα έχουμε

$$P\left\{\max_{a\le t\le b}\left|X_t - X_t^{(n)}\right| \ge \frac{1}{n}, πεπερασμένα\ συχνά\right\} = 1$$

Συνεπώς υπάρχει ένα Ω_0 τέτοιο ώστε $P(\Omega_0) > 0$ και για κάθε $w \in \Omega_0$ υπάρχει θετικός ακέραιος N(w) ώστε

$$\max_{a\le t\le b}\left|X_t(w) - X_t^{(n)}(w)\right| < \frac{1}{n}\,, \forall n \ge N(w).$$

Άρα για κάθε $w \in \Omega_0$,η υπακολουθία των συναρτήσεων $X_{(\cdot)}^{(n)}(w), n \ge 1$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $X_{(\cdot)}(w)$ στο διάστημα [a,b] και αφού η $X_t^{(n)}$είναι συνεχής θα υπάρχει ένα Ω_n με $P(\Omega_n) = 1$ όπου για κάθε $w \in \Omega_n$ η συνάρτηση $X_{(\cdot)}^{(n)}(w)$ θα είναι συνεχής.
Αν πάρουμε λοιπόν $\Omega' = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ τότε θα έχουμε P($\Omega_n{}'$)=1 και για κάθε $w \in \Omega'$η ακολουθία $X_{(\cdot)}^{(n)}(w)\,, n = 1,2,3$ ... θα είναι ακολουθία συνεχων συναρτήσεων οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $X_{(\cdot)}(w)$ στο [a,b].

Άρα η συνάρτηση $X_{(\cdot)}(w)$ είναι συνεχής για κάθε $w \in \Omega'$.
Συνεπώς σχεδόν όλα τα τυχαία μονοπάτια της στοχαστικής ανέλιξης X_t είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [a,b] και τελικά δείξαμε πως η X_t είναι συνεχής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΙΤΟ

2.1 Λογισμός του Itό

Γνωρίζουμε ότι ο λογισμός των Leibniz-Newton χρησιμοποιεί ντετερμινιστκές συναρτήσεις με βασικό κανόνα παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων,τον κανόνα αλυσίδας, σύμφωνα με τον οποίο για f, g διαφορίσιμες τότε και η σύνθετη συνάρτηση f(g(t)) είναι διαφορίσιμη και έχει παράγωγο

$$\frac{d}{dt}f\big(g(t)\big) = f'\big(g(t)\big)g'(t)$$

Και σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού γράφεται με μορφή ολοκληρωμάτων ως εξής

$$f\big(g(t)\big) - f\big(g(a)\big) = \int_a^t f'\big(g(s)\big)g'(s)ds$$

Ο λογισμός του Itό ασχολείται με τυχαίες συναρτήσεις όπως π.χ στοχαστικές διαδικασίες. Έστω λοιπόν μια κίνηση Brown B(t), f μια διαφορίσιμη συνάρτηση και f(B(t)) η σύνθεσή τους. Σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα αλυσίδας θα έπρεπε να ισχύει $\frac{d}{dt}f\big(B(t)\big) = f'\big(B(t)\big)B'(t)$ το οποίο δεν έχει νόημα αφού σχεδόν σε όλα τα μονοπάτια η κίνηση Brown δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη.

Το πρόβλημα που παρατηρήθηκε είναι σημαντικό επειδή το ολοκλήρωμα του Itό δεν έχει τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Stieltjes λόγω του ότι η κίνηση Brown που χρησιμοποιείται ως ολοκληρωτής δεν έχει πεπερασμένη παράγωγο.

Για να συντάξουμε ένα ισοδύναμο κανόνα αλυσίδας θα πρέπει να εργαστούμε ως εξής.
Θα γράψουμε το B΄(s)ds σαν διαφορικό dB(s) και θα δείξουμε ότι η ισότητα

$$f\big(B(t)\big) - f\big(B(a)\big) = \int_a^t f'\big(B(s)\big)dB(s) + \frac{1}{2}\int_\alpha^t f''(B(s))ds$$

ισχύει για κάθε δύο φορές συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση f, δηλαδή θα δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα του Itό θα ικανοποιεί έναν τροποποιημένο κανόνα Leibniz
Αυτό θα γίνει χρησιμοποιώντας τη σύνθετη συνάρτηση στον κανόνα αλυσίδας με τη μορφή ολοκληρωμάτων για το λογισμό του Itό.

Αρχικά το ολοκλήρωμα $\int_a^t f'\big(B(s)\big)dB(s)$ είναι ένα ολοκλήρωμα του Itό αφού $f'\big(B(t)\big) \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$.
Θεώρημα (2.1) (Ιδιότητες ολοκληρώματος)
Έστω f μια συνεχής και $\{\mathcal{F}_t\}$ −προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία.
Τότε $f \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ και

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{\|\Delta_n\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})) \ \text{, στην πιθανότητα,}$$

Όπου $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ είναι μια διαμέριση του πεπερασμένου διαστήματος [a,b] και $||\Delta_n|| = \max_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1})$.

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα (2.1) έχουμε

$$\lim_{\|\Delta_n\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}})\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big) = \int_{\alpha}^{t} f'\big(B(s)\big)dB(s)\ ,\ \sigma\tau\eta\nu\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha$$

Και επίσης για το δεύτερο άθροισμα σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα το οποίο μας δίνει το όριο της τετραγωνικής μεταβολής (quadratic variation) της κίνησης Brown B(t).

Θεώρημα (2.2) (Ιδιότητες κίνησης Brown)
Έστω $\Delta_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ μια διαμέριση του πεπερασμένου διαστήματος [α,b].τότε

$$\sum_{i=1}^{n}\big(B(t_i) - B(t_{i-1})\big)^2 \to b - a\ ,$$

$\kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \|\Delta_n\| = \max_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1}) \to 0\ \ \sigma\tau o\ L^2(\Omega)$.

Οπότε έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} f''\Big(B_{t_{i-1}} + \lambda_i\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big)\Big)\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big)^2$$

$$\to \int_{a}^{t} f''\big(B(s)\big)ds\ \ ,\sigma\chi\epsilon\delta\acute{o}\nu\ \beta\acute{\epsilon}\beta\alpha\iota\alpha\ \gamma\iota\alpha\ \|\Delta_n\| \to 0$$

2.2 Λήμμα του Ιτό

Θεώρημα (2.3)
Έστω μια συνάρτηση f(x) ∈ C^2.Τότε

$$f\big(B(t)\big) - f\big(B(a)\big) = \int_{a}^{t} f'\big(B(s)\big)\partial B(s) + \frac{1}{2}\int_{a}^{t} f''(B(s))\,\partial s$$

Όπου το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ένα Ito ολοκλήρωμα και το δεύτερο ένα ολοκλήρωμα Riemann για κάθε απλό βήμα της B(s)
Απόδειξη
Έστω μια διαμέριση του διαστήματος [a, t], $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$.
Τότε

$$f\big(B(t)\big) - f\big(B(a)\big) = \sum_{i=1}^{n}\big(f\big(B(t_i)\big) - f(B(t_{i-1})\big) \qquad (2.1.1)$$

Έστω $f \in C^2$ δηλαδή είναι δύο φορές συνεχής και παραγωγίσιμη τότε από το ανάπτυγμα του Taylor έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0 + \lambda(x - x_0))(x - x_0)^2$$

για $\lambda \in (0,1)$, οπότε η ισότητα (1.1.1) θα γίνει

$$f\big(B(t)\big) - f\big(B(a)\big) = \sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''\left(B_{t_{i-1}} + \lambda_i\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big)\right)\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big)^2 \qquad (2.1.2)$$

για $\lambda_i \in (0,1)$ και B(t)= B_t.

Θα δείξουμε ότι η παρακάτω ακολουθία έχει υπακολουθία που συγλίνει σχεδόν βέβαια στο $\int_a^t f''(B(s))\,\partial s$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f''\left(B_{t_{i-1}} + \lambda_i\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big)\right)\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(f''\left(B_{t_{i-1}} + \lambda_i\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big) - f''\big(B_{t_{i-1}}\big)\right)\right)\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big)^2$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})\left[\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big)^2 - (t_i - t_{i-1})\right]$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) \qquad (1.1.3)$$

Για τη σχεδόν βέβαιη σύγκλιση της ακολουθίας των δύο πρώτων αθροισμάτων θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμμα (2.5), (2.6).

Σχόλιο (2.4)
Αν για τις διαμερίσεις των διαστημάτων ισχύουν

- $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots \subset \Delta_n \subset \cdots$ ή
- $\sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n\|^2 < \infty$

Τότε πράγματι η X_n συγκλίνει στο 0 σχεδόν βέβαια αφού το άθροισμα

$\sum_{i=1}^{n}\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big)^2$ συγκλίνει στο t-a σχεδόν βέβαια.

Για τα $A_{i-1}^{(L)}$ ισχύει $A_{n-1}^{(L)} \subset \cdots \subset A_1^{(L)} \subset A_0^{(L)}$.
Και από τον ορισμό της ακολουθίας $S_{n,L}$ έχουμε οπότε $A_{n-1}^{(L)} \subset \{S_n = S_{n,L}\}$ το οποίο μας δίνει

$$\{S_n \neq S_{n,L}\} \subset (A_{n-1}^{(L)})^c \subset \{\max_{a\leq s\leq t}|B(s)| > L\}$$

Το οποίο για πιθανότητες μας δίνει το εξής

$$P\{S_n \neq S_{n,L}\} \leq P\{\max_{a\leq s\leq t}|B(s)| > L\}.$$

Από την ανισότητα Doob submartingale έχουμε ότι

$$P\left\{\max_{a\leq s\leq t}|B(s)| > L\right\} \leq \frac{1}{L}E|B(t)| = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

Οπότε

$$P\{S_n \neq S_{n,L}\} \leq \frac{1}{L}\sqrt{\frac{2t}{\pi}}, \text{ για κάθε n} \geq 1$$

Παρατηρούμε πως για κάθε ε >0,

$$\{|S_n| > \varepsilon\} \subset \{|S_{n,L}| > \varepsilon\} \cup \{S_n \neq S_{n,L}\}$$

Βάζοντας πιθανότητες

$$P\{|S_n| > \varepsilon\} \leq P\{|S_{n,L}| > \varepsilon\} + P\{S_n \neq S_{n,L}\}$$

Άρα από τις δύο τελευταίες ανισώσεις θα έχουμε

$$P\{|S_n| > \varepsilon\} \leq P\{|S_{n,L}| > \varepsilon\} + \frac{1}{L}\sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

Αν επιλέξουμε ένα μεγάλο αριθμό L τέτοιο ώστε $\frac{1}{L}\sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \frac{\varepsilon}{2}$ τότε θα έχουμε αποδείξει πως η ακολουθία $S_{n,L}$ συγκλίνει στο 0 με πιθανότητα καθώς

$$\|\Delta_n\| \to 0.$$

Ως εκ τούτου υπάρχει $n_0 \geq 1$ τέτοιο ώστε $P\{|S_n| > \varepsilon\} < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$.
Άρα ισχύει $P\{|S_n| > \varepsilon\} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.
Άρα δείξαμε ότι η S_n συγκλίνει στο 0 με πιθανότητα καθώς $\|\Delta_n\| \to 0$.

Και σύμφωνα με τα λήμμα (2.5) , (2.6) και

$$\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) \to \int_{\alpha}^{t} f''(B(s))dB(s) \text{ , σχεδόν βέβαια, έχουμε}$$

Για την ισότητα (2.1.3)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f''\left(B_{t_{i-1}} + \lambda_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right)\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 \to \int_{\alpha}^{t} f''(B(s))dB(s) \text{ ,}$$

Οπότε υπάρχει $\{S_{n_k}\}$ υπακολουθία της $\{S_n\}$ που συγκλίνει στο $\int_\alpha^t f''(B(s))dB(s)$, σχεδόν βέβαια καθώς $\|\Delta_n\| \to 0$.

Λήμμα (2.5)
Έστω μια $g(x)$ συνεχής συνάρτηση στο $\mathcal{R}$. Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε
$\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ μια διαμέριση του [a,t] και 0<λ<1 για $1 \leq i \leq n$.
Τότε υπάρχει ακολουθία του αθροίσματος

$$\sum_{i=1}^{n} \left(g\left(B_{t_{i-1}} + \lambda_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right) - g\left(B_{t_{i-1}}\right)\right)\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2$$

που συγκλίνει στο 0 σχεδόν βέβαια για $\|\Delta_n\| \to 0$.

Απόδειξη
Θέτουμε $X_n = \sum_{i=1}^{n} \left(g\left(B_{t_{i-1}} + \lambda_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right) - g\left(B_{t_{i-1}}\right)\right)\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2$,n≥1
Και έστω η τυχαία μεταβλητή

$$\xi_n = \max_{1 \leq i \leq n, 0<\lambda<1} \left| g\left(B_{t_{i-1}} + \lambda_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right) - g\left(B_{t_{i-1}}\right)\right|$$

Τότε έχουμε

$$|X_n| \leq \xi_n \sum_{i=1}^{n} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2$$

Λόγω της συνέχειας της g(x) και της κίνησης Brown B(t),η ξ_n συγκλίνει στο 0 σχεδόν βέβαια.
Όμως σύμφωνα με το Θεώρημα (1.10) το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n}\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2$συγκλίνει στο t-a στον $L^2[a,b]$.Άρα το $\xi_n \sum_{i=1}^{n}\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο 0 σχεδόν βέβαια οπότε και η X_n έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο 0 σχεδόν βέβαια.

Λήμμα (2.6)
Έστω μια $g(x)$ συνεχής συνάρτηση στο $\mathcal{R}$. Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε
$\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ μια διαμέριση του [a,t].
Τότε η ακολουθία

$$\sum_{i=1}^{n} g\left(B_{t_{i-1}}\right)\left(\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 - \left(t_i - t_{i-1}\right)\right)$$

συγκλίνει στο 0 με πιθανότητα για $\|\Delta_n\| \to 0$.
Απόδειξη
Για κάθε L>0 ορίζουμε

$$A_{i-1}^{(L)} = \left\{\left|B\left(t_j\right)\right| \leq L\ , \forall\, j \leq i-1\right\}, 1 \leq i \leq n$$

Ας ονομάσουμε

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} g\big(B_{t_{i-1}}\big)\big(\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big)^2 - (t_i - t_{i-1})\big)$$

και ας ορίσουμε

$$S_{n,L} = \sum_{i=1}^{n} g\left(B_{t_{i-1}}\right) \cdot 1_{A_{i-1}^{(L)}}\big(\big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big)^2 - (t_i - t_{i-1})\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g\left(B_{t_{i-1}}\right) \cdot 1_{A_{i-1}^{(L)}} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Όπου $X_i = \big(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\big)^2 - (t_i - t_{i-1})$ και $Y_i = g(B_{t_{i-1}}) \cdot 1_{A_{i-1}^{(L)}} X_i$.

Έστω επίσης $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s); s \le t\}$.τότε για i≠j έστω i<j ,σύμφωνα με την Υπο Συνθήκη Μέση Τιμή θα έχουμε

$$E\big(Y_i Y_j\big) = E\left(E\left[Y_i Y_j \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right]\right) = E(Y_i g(B_{t_{j-1}}) \cdot 1_{A_{j-1}^{(L)}} E[X_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}] = 0$$

Επίσης από τον ορισμό του $A_{i-1}^{(L)}$ έχουμε $Y_i^2 \le \max_{|x|\le L}(|g(x)|^2) X_i^2$

και αφού $E(X_i^2) = 2(t_i - t_{i-1})^2$ ισχύει

$$E(Y_i^2) \le 2(t_i - t_{i-1})^2 \max_{|x|\le L}(|g(x)|^2)$$

Άρα

$$E\big(S_{n,L}^2\big) = \sum_{i=1}^{n} E\big(Y_i^2\big) \le 2 \max_{|x|\le L}(|g(x)|^2) \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^2 \le$$

$$\le 2\|\Delta_n\|(t-a) \max_{|x|\le L}(|g(x)|^2) \to 0 \,, \|\Delta_n\| \to 0$$

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε L>0 η ακολουθία $S_{n,L}$ συγκλίνει στο 0 στον $L^2[a,b]$ με πιθανότητα καθώς $\|\Delta_n\| \to 0$.

Σχόλιο (2.7)

Αν έχουμε μια συνάρτηση f(t,x) και αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή x με B(t) και προκύψει η στοχαστική διαδικασία $f(t, B(t))$ τότε το t θα εμφανίζεται και σαν μεταβλητή της f και στην κίνηση Brown B(t).Οπότε θα εφαρμόσουμε για τη μεταβλητή τον τύπο των Leibniz-Newton και για την στοχαστική ανέλιξη τον τύπο του Ιτό σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

Η ακόλουθη γενίκευση του Λήμμα του Ιτό πρέπει να δειχθεί με όμοιο τρόπο όπως το θεώρημα (2.3).

Θεώρημα (2.8)

Έστω $f(t,x)$ συνεχής συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Τότε

$$f\big(t,B(t)\big)=f\big(a,B(a)\big)+\int_a^t\frac{\partial f}{\partial x}\big(s,B(s)\big)ds+\int_a^t[\frac{\partial f}{\partial t}\big(s,B(s)\big)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,B(s))]ds$$

2.3 Διαδικασία του Ιτό και ο τύπος του Ιτό σε γενική μορφή

Για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε το χώρο $L_{ad}(\Omega,L^1[a,b])$ για να δηλώσουμε το χώρο όλων των $\{\mathcal{F}_t\}$ −προσαρμοσμένων στοχαστικών διαδικασιών $f(t)$ με $\int_a^b E(|f(t)|)dt<\infty$ σχεδόν βέβαια.

Ορισμός (2.9)
Μια ανέλιξη Ιτό είναι μια στοχαστική ανέλιξη της μορφής

$$X_t=X_a+\int_a^t f(s)dB(s)+\int_a^t g(s)ds\,,a\le t\le b$$

όπου X_a είναι $\mathcal{F}_\alpha$-μετρήσιμη, $f\in L_{ad}(\Omega,L^2[a,b])$, $g\in L_{ad}(\Omega,L^1[a,b])$

Ένας εύκολος και χρήσιμος τρόπος να γράψουμε την ισότητα του ορισμού (1.2) είναι η διαφορική μορφή (συντομογραφία)

$$dX_t=f(t)dB(t)+g(t)dB(t)$$

Θεώρημα (2.10) (Γενική μορφή του τύπου του Ιτό)
Έστω X_t μια ανέλιξη Ιτό της μορφής

$$X_t=X_a+\int_a^t f(s)dB(s)+\int_a^t g(s)ds\,,a\le t\le b$$

Έστω επίσης θ(t,x) μια συνεχής συνάρτηση ($\theta\in C^{1,2}$) με συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Τότε θ(t, X_t) είναι επίσης μια ανέλιξη Ιτό και ισχύει

$$\begin{aligned}\theta(t,X_t)=\theta(a,X_a)&\\&+\int_a^t\frac{\partial\theta}{\partial x}(s,X_s)f(s)dB(s)\\&+\int_a^t[\frac{\partial\theta}{\partial t}(s,X_s)+\frac{\partial\theta}{\partial x}(s,X_s)g(s)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(s,X_s)f^2(s)]ds.\end{aligned}$$

2.3.1 Γενίκευση του ολοκληρώματος Ιτό για Martingales

Μία γενίκευση του ολοκληρώματος του Ιτό είναι όταν αντί για μια κίνηση Brown σαν ολοκληρωτής είναι μια γενικότερη Martingale.

Ορισμός (2.11)
Έστω X_t μια στοχαστική διαδικασία δεξιά συνεχής και έχει αριστερό όριο σε κάθε σημείο και M_t μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη L^2 martingale. Το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t X_s\, dM_s$ ορίζεται ως $\int_0^t X_s dM_s \coloneqq \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$,

όπου το όριο λαμβάνεται στον L^2. Το $\{t_i\}$, i=0,…,n είναι μια διαμέριση του [0,t] για την οποία ισχύει $|\Delta t| \coloneqq sup_n|t_{i+1} - t_i| = 0$ καθώς $n \to +\infty$.

Τύπος του Itό για Martingales

Έστω M_t συνεχής από δεξιά Martingale με πλευρικά όρια από τα αριστερά τέτοια ώστε $E(M_t{}^2) < \infty$ για κάθε $t \in [a, b]$.
Έστω επίσης F μια C²–συνάρτηση και $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ μια διαμέριση του διαστήματος [a,t].Τότε,

$$F(M_t) - F(M_a) = \sum_{i=1}^{n} (F(M_{t_i}) - F(M_{t_{i-1}}))$$

Λόγω της C^2 ιδιότητας της F και της συνέχειας της M_t θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε τις διαφορές $F(M_{t_i}) - F(M_{t_{i-1}})$ από τις παραγώγους της F.
Αυτό οδηγεί σε μια γενίκευση του Λήμματος του Itό για γενικά Martingales.

Θεώρημα (2.12)
έστω M_t μια δεξιά συνεχής και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη Martingale με πλευρικά όρια από τα αριστερά και F μια C²– συνάρτηση. Τότε

$$F(M_t) = F(M_a) + \int_a^t F'(M_{s-}) dM_s + \frac{1}{2}\int_a^t F''(M_s) dM_s + \sum_{a\le s\le t} (F(M_s) - F(M_{s-}) - F'(M_{s-})\Delta M_s)$$

όπου $[M]_s^c$ είναι το συνεχές μέρος της $[M]_s$ και $\Delta M_s = M_s - M_{s-}$.

Θεώρημα (2.13)
έστω M_t μια συνεχής και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη Martingale και μια F(t, x) συνεχής συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.
Τότε

$$F(t, M_t) = F(a, M_a) + \int_a^t \frac{dF}{dt}(s, M_s) ds + \int_a^t \frac{dF}{dx}(s, M_s) dM_s + \frac{1}{2}\int_a^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, M_s) dM_s.$$

2.4 Εφαρμογές του Λήμματος του Itό

2.4.1 Υπολογισμός στοχαστικού ολοκληρώματος

Ένα ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς f στο [a,b] με παράγουσά της την F μπορεί να υπολογιστεί με βάση το Θεμελιώδες Θεώρημα των Leibniz-Newton σύμφωνα με $\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει Θεμελιώδες Θεώρημα το οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό στοχαστικών ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_a^b g(t)dB(t)$ για $g \in L_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ και αυτό το θεώρημα όταν $g(t) = f\big(B(t)\big)$ για f συνεχή συνάρτηση είναι το Θεώρημα του Ιτό και το Θεώρημα (2.8) είναι ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε το θεώρημα του Ιτό.

Θεώρημα (2.14)
Έστω F(t, x) μια παράγουσα ως προς το x της συνεχούς συνάρτησης f(t, x).Έστω επίσης οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial F}{\partial t}$ $και$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ να είναι συνεχείς.Τότε

$$\int_a^b f\big(t, B(t)\big)dB(t) = F(t, B(t))]_a^b - \int_a^b [\frac{\partial F}{\partial t}\big(t, B(t)\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\big(t, B(t)\big)]dt$$

Παρατηρούμε πως το ολοκλήρωμα $\int_a^b [\frac{\partial F}{\partial t}\big(t, B(t)\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\big(t, B(t)\big)]dt$ είναι ένα ολοκλήρωμα για κάθε τυχαίο μονοπάτι της κίνησης Brown B(t).επίσης για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα θέλουμε την παράγουσα F(t, x) της συνάρτησης f(t, x) ως προς τη μεταβλητή x.
Έτσι η παραπάνω μορφή του τύπου του αποτελεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού του Ιτό.

Για την περίπτωση που η προς ολοκλήρωση συνάρτηση f δεν ορίζεται στο t, η ισότητα του Θεωρήματος (2.8) γίνεται

$$\int_a^b f\big(B(t)\big)dB(t) = [F(B(t))]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f'\big(B(t)\big)dt$$

2.4.2 Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ σύμφωνα με το Λογισμό των Leibniz-Newton μπορεί επίσης να γραφτεί σαν εξίσωση ολοκληρωμάτων της μορφής $x(t) = x_a + \int_a^t f\big(s, x(s)\big)ds$.

Όταν διαταράσσεται από την τυπική (formal) παράγωγο $\dot{B}(t)$ της κίνησης Brown B(t),η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(t, X)\dot{B}(t) + f(t, X).$$

Η παραπάνω φορμαλιστική μπορεί να αποκτήσει αυστηρή μαθηματική υπόσταση με τη χρήση της στοχαστικής ανέλιξης και του λογισμού του Ιτό ως εξής

$$X_t = X_\alpha + \int_a^t \sigma(s, X_s) dB(s) + \int_a^t f(s, X_s) ds\ ,\ \ a \le t \le b.$$

αν και συχνά θα χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία

$$dX = \sigma(t, X) dB(t) + f(t, X) dt.$$

Το κίνητρο του Ιτό για την ανάπτυξη της θεωρίας της στοχαστικής ολοκλήρωσης ήταν η κατασκευή "διαδικασιών διάχυσης" για την επίλυση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Ας δώσουμε αρχικά τον ορισμό μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

Ορισμός (2.14)
Μια εξίσωση της μορφής

$$X_t = \xi + \int_\alpha^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_\alpha^t f(s, X_s) ds \qquad (2.1.4)$$

ή ισοδύναμα

$$dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + f(t, X_t) dt\ \ , X_a = \xi \qquad (2.1.5)$$

όπου B_t είναι m-διάστατη κίνηση Brown.

σ:$\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^{n\times m}$ και $f: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις και $X_t \in \mathcal{R}^n$ ονομάζεται Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (2.1.5) (ΣΔΕ).

Η λύση μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται διαδικασία διάχυσης.
Ορισμός (2.15)
Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας (Ω,A,P) με φίλτρο
$(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}\ \ με\ a \le t \le b$.Έστω επίσης οι μετρήσιμες ως προς το t συναρτήσεις σ: $\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^{n\times m}$ και $f: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$,μια $\mathcal{F}_\alpha$–μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή X και μια κίνηση Brown B_t.

Η λύση X_t της ΣΟΕ (2.1.4) είναι μια στοχαστική διαδικασία για
$a \le t \le b$ η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω:

a. Η στοχαστική διαδικασία $\sigma(t, X_t)\ \in L_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$ δηλαδή το $\int_\alpha^t \sigma(s, X_s) dB_s$ είναι ολοκλήρωμα του Ιτό και $f(t, X_t) \in L^1[a, b]$.
   Για κάθε $t \ge 0$, ισχύει για τα ολοκληρώματα
   $\int_\alpha^t |\sigma(s, X_s)|^2 ds < \infty\ ,\ \int_\alpha^t |f(s, X_s)| ds < \infty$ σχεδόν βέβαια

b. Η X_t ικανοποιεί την εξίσωση (1.1.4) δηλαδή

$$X_t = X + \int_\alpha^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_\alpha^t f(s, X_s) ds \ , \forall t \in [\alpha, \beta] \ , \text{σχεδόν βέβαια.}$$

Ορισμός (2.16)
Μια μετρήσιμη συνάρτηση $g(t,x)$ στο χώρο [a,b]× $\mathcal{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς x αν υπάρχει μια σταθερά K>0 τέτοια ώστε

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leq K|x-y| \ , \forall a \leq t \leq b \ \kappa\alpha\iota \ x, y \in \mathcal{R}$$

Ορισμός (2.17)
Μια μετρήσιμη συνάρτηση $g(t,x)$ στο χώρο [a,b]× $\mathcal{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη της γραμμικής αύξησης ως προς το x αν υπάρχει μια σταθερά K>0 τέτοια ώστε

$$|g(t,x)| \leq K(1 + |x|) \ , \forall \ a \leq t \leq b \ \kappa\alpha\iota \ x \in \mathcal{R}$$

Σημείωση: $\gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x \geq 0 \ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota \ 1 + x^2 \leq (1+x)^2 \leq 2(1+x^2)$

Τότε η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μιας σταθεράς C>0 τέτοιας ώστε

$$|g(t,x)|^2 \leq C(1 + x^2) \ , \forall \ a \leq t \leq b \ \kappa\alpha\iota \ x \in \mathcal{R}$$

Θεώρημα (2.18)
Έστω $\sigma(t,x)$ και $f(t,x)$ μετρήσιμες συναρτήσεις στον [a,b]× $\mathcal{R}$ οι οποίες ικανοποιούν τις προυποθέσεις Lipschitz ως προς x.Έστω επίσης ξ μια $\mathcal{F}_\alpha$–μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή για την οποία $E(\xi^2)<\infty$.
Τότε η (ΣΟΕ) (2.1.4) έχει μοναδική συνεχή λύση X_t.

Απόδειξη
Έστω ότι η εξίσωση (2.1.4) έχει δύο συνεχείς λύσεις X_t και Y_t.έστω $Z_t = X_t - Y_t$.
Τότε η Z_t είναι συνεχής στοχαστική ανέλιξη και ισχύει

$$Z_t = \int_a^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dB(s) + \int_a^t (f(s, X_s) - f(s, Y_s)) ds$$

Απ΄την ανισότητα $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ έχουμε

$$Z_t^2 \leq 2[(\int_a^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dB(s))^2 + (\int_a^t (f(s, X_s) - f(s, Y_s)) ds)^2]$$

Επίσης από τη συνθήκη του Lipschitz για τη συνάρτηση σ(t,x) θα έχουμε

$$E(\int_a^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dB(s))^2 = \int_a^t E[(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dB(s)$$

Ενώ απ΄τη συνθήκη του Lipschitz για τη συνάρτηση f(t,x) θα έχουμε

$$\left(\int_a^t (f(s, X_s) - f(s, Y_s)) ds\right)^2 \leq (t-a) \int_a^t (f(s, X_s) - f(s, Y_s))^2 ds \leq (b-a) K^2 \int_a^t Z_s^2 ds$$

Από τις τρεις τελευταίες ανισότητες θα έχουμε

$$E(Z_t^2) \leq 2K^2(1+b-a)\int_a^t E(Z_s^2)ds$$

Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της λύσης θα χρειαστούμε ένα Λήμμα για να εκμεταλλευτούμε τις παραπάνω ανισότητες

Απ΄την ανισότητα των Bellman-Gronwall στο Λήμμα (παράρτημα) έχουμε $E(Z_t^2) = 0$ για κάθε $t \in [a,b]$.Έτσι $Z_t = 0$ σχεδόν βέβαια για κάθε $t \in [a,b]$.
Έστω $\{r_1, r_2, \dots\}$ μια απαρίθμηση των ρητών αριθμών στο διάστημα [a,b],τότε για κάθε r_n,υπάρχει Ω_n τέτοιο ωστε P(Ω_n) και $Z_{r_n}(w) = 0$ για κάθε $w \in \Omega_n$.Έστω τώρα $\Omega' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ για το οποίο ισχύει P(Ω')=1 και για κάθε n και $w \in \Omega'$ θα έχουμε $Z_{r_n}(w) = 0$.

Όμως η Z_t είναι συνεχής στοχαστική ανέλιξη οπότε υπάρχει Ω''τέτοιο ώστε P(Ω'')=0 και για κάθε $w \in \Omega''$ η συνάρτηση $Z_t(w)$ είναι συνεχής συνάρτηση του t.Αν πάρουμε το $\Omega_0 = \Omega' \cap \Omega''$ θα έχουμε P(Ω_0)=1 και για κάθε $w \in \Omega_0$ η συνάρτηση $Z_t(w)$ είναι συνεχής η οποία μηδενίζει σε όλους τους ρητούς του διαστήματος [a,b].
Άρα για κάθε $w \in \Omega_0$ έχουμε $Z_t(w) = 0$ για όλα τα $t \in [a,b]$, οπότε X_t, Y_t είναι οι ίδιες συνεχείς στοχαστικές ανελίξεις.
Ως προς την ύπαρξη εφαρμόζουμε το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach εκμεταλλευόμενοι την ισομετρία του Ιτό.

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται και για διανυσματικές συναρτήσεις

Θεώρημα (2.19)
Έστω $\sigma(t,x)$ και $f(t,x)$ διανυσματική συνάρτηση της (2.1.5) να είναι μετρήσιμες και επίσης μια σταθερά K>0 τέτοια ώστε για κάθε $t \in [a,b]$ και ισχύουν

1) (Συνθήκη Lipschitz)
$$\|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K|x-y| \ \ και \ \ |f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x-y|$$
2) (Συνθήκη Γραμμικής αύξησης)
$$\|\sigma(t,x)\|^2 \leq K(1+|x|^2) \ \ και \ \ |f(t,x)|^2 \leq K(1+|x|^2).$$

Τότε για κάθε $\mathcal{F}_a$–μετρήσιμο τυχαίο διάνυσμα ξ με $E(|\xi|^2) < 0$ η στοχαστική εξίσωση των ολοκληρωμάτων $X_t = \xi + \int_\alpha^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_\alpha^t f(s, X_s)ds$ έχει μοναδική συνεχή λύση. Η λύση είναι μια στοχαστική διαδικασία που ικανοποιεί την ιδιότητα Markov.

2.4.3 Ημιομάδες και γεννήτορες τελεστές

Ορισμός (2.20)
Μια οικογένεια γραμμικών τελεστών $\{T_t; t \geq 0\}$ σε χώρο Banach $\mathcal{B}$ εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|\cdot\|$ θα λέγεται (C_0)-συστολή ημιομάδα αν ικανοποιεί τα ακόλουθα

i. $\lim_{t \downarrow 0} T_t\, h = h\,, \forall h \in \mathcal{B}$ (ισχυρή συνέχεια)

ii. $\|T_t h\| \leq \|h\|$, $\forall t \geq 0$ (συστολή)

iii. $T_0 = 1$, $T_{s+t} = T_s T_t$, $\forall s, t \geq 0$ (ημιομάδα)

Ορισμός (2.21)

Έστω $\{T_t; t \geq 0\}$ είναι (C_0)-ημιομάδα συστολών σε χώρο Banach $\mathcal{B}$ τότε ο απειροστός γεννήτοράς της ορίζεται ως ο τελεστής

$$Ah = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t h - h)$$

με πεδίο ορισμού αποτελούμενο από όλα τα διανύσματα h τέτοια ώστε το όριό τους να υπάρχει στον $\mathcal{B}$.

Θεώρημα (2.22)

Ο απειροστός γεννήτορας A είναι ένας πυκνά ορισμένος τελεστής δηλαδή το πεδίο ορισμού του είναι πυκνό στον $\mathcal{B}$.

Απόδειξη

Έστω $f_n(s) = ne^{-ns}$, $n > 0$ και C_{f_n} ο τελεστής ο οποίος είναι μετασχηματισμός Laplace του T_t πολλαπλασιασμένο με n.

$$C_{f_n}(x) = \int_0^\infty f_n(s) T_s(x) ds \ , \ \ x \in X$$

Το ολοκλήρωμα ορίζεται σαν ολοκλήρωμα Riemann.η συνήθης διαδικασία ορισμού του ολοκληρώματος Riemann αριθμητικών συναρτήσεων μπορεί να επεκταθεί σε συναρτήσεις με τιμές σε τοπικά κυρτό και διαδοχικά πλήρη διάστημα X,
χρησιμοποιώντας συνεχείς ημι-νόρμες p στον X στη θέση των απολύτων τιμών των αριθμών. Η σύγκλιση του κατάλληλου ολοκληρώματος είναι συνέπεια της ισο-συνέχειας του T_t και ισχύει

$$\mathrm{p}\big(f_n(s) T_s(x)\big) = ne^{-ns} \mathrm{p}(T_s(x))$$

Και η διαδοχική πληρότητα του X.

Θα έχουμε λοιπόν από την ανισότητα

$$\mathrm{p}\left(C_{f_n}(x)\right) \leq \int_0^\infty ne^{-ns} \mathrm{p}\big(T_s(x)\big) ds \leq \max_{s \geq 0} \mathrm{p}\big(T_s(x)\big)$$

οτι ο τελεστής $C_{f_n}(x)$ είναι συνεχής,γραμμικός και $C_{f_n}(x) \in L(X, X)$ και θα δείξουμε ότι

$$R\left(C_{f_n}(x)\right) \subseteq D(A) \ , \forall n > 0 \qquad (2.1.6)$$

και

$$\lim_{n \to \infty} C_{f_n}(x) = x \ , \forall x \in X$$

τότε η ένωση $\bigcup_{n=1}^\infty R\left(C_{f_n}(x)\right)$ θα είναι πυκνή στο X και το πεδίο ορισμού του A θα είναι πυκνό στον X.

Για τον εγκλεισμό (2.1.6) θα πάρουμε

$$\frac{1}{t}(T_t - I)C_{f_n}(x) = \frac{1}{t}\int_0^\infty f_n(s)\, T_t T_s(x)ds - \frac{1}{t}\int_0^\infty f_n(s)\, T_s(x)ds$$

και λόγω της συνέχειας και της γραμμικότητας του T_t μπορεί να γίνει η αλλαγή αφού $\int_0^\infty T_t \ldots = T_t \int_0^\infty \ldots$ οπότε

$$\frac{1}{t}(T_t - I)C_{f_n}(x) = \frac{1}{t}\int_0^\infty f_n(s)\, T_{s+t}(x)ds - \frac{1}{t}\int_0^\infty f_n(s)\, T_s(x)ds$$

$$= \frac{e^{nt}-1}{t} n\int_t^\infty e^{-nu}T_u(x)du - \frac{1}{t}n\int_0^t e^{-ns}T_s(x)ds =$$

$$= \frac{e^{nt}-1}{t}\left\{C_{f_n}(x) - \int_0^t ne^{-nu}T_u(x)du\right\} - \frac{1}{t}\int_0^t f_n(s)\, T_s(x)ds$$

Λόγω της συνέχειας του $f_n(s)T_s(x)$ ως προς το s το δεύτερο μέρος τείνει στο $-f_n(0)T_0(x) = -nx$ καθώς t→ 0.ομοίως το πρώτο μέρος τείνει στο $nC_{f_n}(x)$ καθώς t→ 0. Άρα θα έχουμε

$$AC_{f_n}(x) = n\big(C_{f_n}(x) - I\big)(x)\,, x \in X$$

Για τη σχέση $\lim_{n\to\infty} C_{f_n}(x) = x\ \ , \forall x \in X$ έχουμε
αφού $\int_0^\infty ne^{-ns}ds = 1$,

$$C_{f_n}(x) - x = n\int_0^\infty e^{-ns}(T_s(x) - x)ds$$

και

$$\mathrm{p}\big(C_{f_n}(x) - x\big) \leq$$

$$\leq n\int_0^\infty e^{-ns}\mathrm{p}(T_s(x) - x)ds = n\int_0^k e^{-ns}\mathrm{p}(T_s(x) - x)ds$$

$$+ n\int_k^\infty e^{-ns}\mathrm{p}(T_s(x) - x)ds = I_1 + I_2$$

Για κάθε ε>0 από τη συνέχεια της $T_s(x)$ ως προς το s υπάρχει ένα δ>0 τέτοιο ώστε $\mathrm{p}(T_s(x) - x) \leq \varepsilon$ για $0 \leq s \leq \delta$.Θα έχουμε λοιπόν

$$I_1 \leq \varepsilon n\int_0^\delta e^{-ns}ds \leq \varepsilon n\int_0^\infty e^{-ns}ds = \varepsilon$$

Για σταθερό δ>0 έχουμε από την ισοσυνέχεια της $\{T_s(x)\}$ για $s \geq 0$

$$I_2 \leq n\int_0^\infty e^{-ns}[\mathrm{p}(T_s(x)) + \mathrm{p}(x))ds \to 0\ \ , n \to \infty$$

Θα κάνουμε μια αναφορά στις στάσιμες διαδικασίες διάχυσης. Έστω μια ανέλιξη X_t με συντελεστή διάχυσης Q(t,x) και ρ(t,x) τέτοια ώστε

$$\mathrm{Q(t,x)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}E\{(X_t - x)(X_t - x)^T | X_0 = x\} \ \kappa\alpha\iota\ \rho(t,x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}E\{X_t - x | X_0 = x\}$$

Έστω επίσης ότι οι πιθανότητες μετάβασης $\{P_t(x,\cdot)\}$ ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

(Α) Για κάθε $t > 0$ και $c > 0$ ισχύει $\lim_{|x|\to\infty} P_t(x,\{y;|y| < c\}) = 0$
(Β) Για κάθε $c > 0$ ισχύει $\lim_{t\to 0} P_t(x,\{y;|y-x| \geq c\}) = 0$ ομοιόμορφα για $x \in \mathcal{R}^n$
(Γ) Για κάθε f φραγμένη και συνεχή συνάρτηση και $t > 0$ η συνάρτηση

$$(T_t f)(x) = \int_{\mathcal{R}^n} f(y)P_t(x,dy) \text{ είναι συνεχής για } x \in \mathcal{R}^n.$$

Θεώρημα (2.23)
Ας υποθέσουμε πως η διάχυση X_t ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες (Α),(Β),(Γ).Τότε η οικογένεια των γραμμικών συντελεστών $\{T_t; t \geq 0\}$ που ορίζονται απ΄τη σχέση της ιδιότητας (Γ) είναι μια (C_0)-ημιομάδα συστολών στον χώρο Banach $C_0(\mathcal{R}^n)$ με απειροστό γεννήτορα Α να δίνεται απ'τη σχέση

$$(A\varphi)(x) = \frac{1}{2}tr\big(Q(x)\big)\varphi''(x) + \rho(x)\cdot\nabla\varphi(x) \qquad (2.1.7)$$

ή ισοδύναμα

$$(A\varphi)(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} Q_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\rho_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

όπου $Q_{ij}(x)$ είναι στοιχεία του $Q(x)$ και $\rho_i(x)$ είναι συνιστώσες του $\rho(x)$.

2.4.4 Η αναπαράσταση των Feynman-Kac

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα Cauchy

$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + cu$
$u(t,x) \in C^{1,2}([0,+\infty)x\Re^n$
$u(0,x) = f(x)$

με τελεστή $\mathrm{A} := \sum_i b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$, c=c(u) συνεχής και φραγμένη και $f \in C_0^2$.

Η λύση του προβλήματος μπορεί να γραφεί σαν η μέση τιμή πάνω στις τροχιές της διαδικασίας του Ito με γεννήτορα τελεστή τον Α.

Θεώρημα (2.24)
Η λύση για το παραπάνω πρόβλημα Cauchy μπορεί να γραφεί ως

$$u(t,x) = E_x\left[f(X_t) e^{\int_0^t c(X_s)ds} \right]$$

Σχόλιο (2.25)

Το παραπάνω θεώρημα μας υποδεικνύει ότι για να υπολογίσουμε τη λύση της εξίσωσης Cauchy στο σημείο χ την χρονική στιγμή t, παίρνουμε μια σειρά από διαχύσεις $X_t(\omega_i)$, οι οποίες έχουν γεννήτορα τον τελεστή Α και όλες ξεκινούν από το σημείο x τη χρονική στιγμή 0.

Οι διαχύσεις αυτές τρέχουν για χρόνο t και για κάθε μία από αυτές υπολογίζουμε την ποσότητα $f(X_t(\omega_i)) e^{\int_0^t c(X_s(\omega_i))ds}$. Ακολούθως παίρνουμε τη μέση τιμή επάνω σε όλες τις τροχιές δηλαδή για όλα τα ω_i και η μέση τιμή αυτή είναι η λύση της εξίσωσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΛΟΓΙΑ

Υπάρχει ένας απέραντος αριθμός φαινομένων στη βιολογία στα οποία ένα βασικό στοιχείο ή ένας πρόδρομος, σε μια αναπτυξιακή διαδικασία, φαίνεται να είναι η εμφάνιση ενός κύματος μιας χημικής συγκέντρωσης, μηχανικής παραμόρφωσης, ηλεκτρικού σήματος και τα λοιπά. Η ανάπτυξη μορφών στη βιολογία όπως για παράδειγμα εμβρυογένεση καθορίζεται πολλές φορές από κυματικά φαινόμενα. Τα μηχανικά κύματα είναι ίσως τα προφανέστερα. Χημικά κύματα συγκέντρωσης τέτοια όπως εκείνα που σχετίζονται με την αντίδραση Belousov-Zhabotinskii αποτελούν οπτικά παραδείγματα. Ένα άλλο παράδειγμα, σχετικό με τους αλληλεπιδρώντες πληθυσμούς, είναι το κύμα διάδοσης μιας επιδημίας. Η μετακίνηση των μικροοργανισμών που κινούνται σε μια πηγή τροφίμων, που κατευθύνεται χημειοτακτικά, είναι ένα άλλο παράδειγμα. Το Dictyostelium discoideum είναι ένα ιδιαίτερα ευρέως μελετημένο παράδειγμα του χημειοτακτισμού.

Το σημείο που θα δώσουμε έμφαση είναι η διαδεδομένη ύπαρξη των φαινομένων κυμάτων στις βιοϊατρικές επιστήμες, που απαιτεί μελέτη των κυμάτων που ταξιδεύουν σε βάθος και η μοντελοποίηση και ανάλυση τους.
Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με διάφορες πτυχές της συμπεριφοράς κυμάτων όπου η διάχυση παίζει καθοριστικό ρόλο.
Μεταξύ των άλλων, θα ασχοληθούμε με κάτι που είναι πλέον αποδεκτό ως μέρος της βασικής θεωρίας στον τομέα και περιγράφει πρακτικά προβλήματα, όπως την πρόοδο και τη συμπεριφορά κυμάτων μιας μόλυνσης.

Κατά την ανάπτυξη ζώντων συστημάτων υπάρχει σχεδόν πάντα συνεχής ανταλλαγή πληροφοριών τόσο σε διακυτταρικό όσο και ενδοκυτταρικό επίπεδο. Η εν λόγω ανακοίνωση είναι αναγκαία για τη διαδοχική ανάπτυξη και την παραγωγή του απαιτούμενου προτύπου και να σχηματίσουν, για παράδειγμα εμβρυογένεση. Η διάδοση των κυματοειδών διαφόρων βιοχημικών συγκεντρώσεων είναι ένα μέσο μετάδοσης των βιοχημικών πληροφοριών.

Στο αναπτυσσόμενο έμβρυο, οι συντελεστές της διάχυσης των βιολογικών χημικών μπορεί να είναι πολύ μικρή με τιμές της τάξεως των 10^{-9} εώς $10^{-11} cm^2 \sec^{-1}$ είναι αρκετά συχνές.

Οι τόσο μικρές τιμές των συντελεστών διάχυσης δείχνουν ότι για να καλυφθούν μακροσκοπικές αποστάσεις της τάξης των αρκετών χιλιοστών απαιτείται μεγάλο χρονικό διάστημα αν η διάχυση είναι η κύρια διαδικασία.

3.1 Εξισώσεις διάχυσης

Μια τυπική εξίσωση διάχυσης σε χώρο μίας διάστασης, συνήθως περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3.1.1)$$

όπου u(t, x) η συγκέντρωση της χημικής ουσίας στο χρόνο t και στη θέση x. Ο χαρακτηριστικός χρόνος ταχύτητας μεταφοράς υπό τη μορφή μιας αλλαγμένης συγκέντρωσης σε μια απόσταση L είναι O (L^2 / D). Μπορούμε να πάρουμε αυτή την εκτίμηση από την εξίσωση χρησιμοποιώντας επιχειρήματα διαστάσεων , λύσεις ομοιότητας ή περισσότερο προφανή από την κλασική λύση που δίνεται από την

$$c(x,t) = \frac{Q}{2(\pi DT)^{1/2}} e^{-x^2/(4Dt)}, t > 0$$

Έτσι, εάν L είναι της τάξης των 1 mm οι τυπικοί χρόνοι με τους ανωτέρω συντελεστές διάχυσης είναι O (10^7 έως 10^9 sec), χρόνοι οι οποίοι είναι υπερβολικά μεγάλοι για τις περισσότερες διαδικασίες στα πρώτα στάδια της ανάπτυξης. Ως εκ τούτου, μια απλή διάχυση είναι απίθανο να αποτελέσει το βασικό μέσο για τη μετάδοση πληροφοριών σε μεγάλες αποστάσεις.

Σε αντίθεση με απλή διάχυση θα δείξουμε ότι όταν οι αντιδράσεις της κινητικής και η διάχυση συζεύγνυνται, υπάρχουν κύματα χημικής συγκέντρωσης που ταξιδεύουν και μπορούν να επηρεάσουν μια βιοχημική αλλαγή πολύ πιο γρήγορα από ό, τι διαδικασίες διάχυσης που δίνονται από εξισώσεις όπως (3.1.1).

Αυτή η σύζευξη οδηγεί σε εξισώσεις διάχυσης και αντίδρασης η οποία σε μια απλή μονοδιάστατη περίπτωση μπορεί να έχει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

όπου u είναι η συγκέντρωση, f (u) παριστά τη χημική κινητική και το D είναι ο συντελεστής διάχυσης.

3.2 Οδεύων κύμα

Θα πρέπει πρώτα να καταλήξουμε στο τι εννοούμε με τον όρο που οδεύων κύμα. Συνήθως ένα κύμα που ταξιδεύει θεωρείται ότι είναι ένα κύμα που ταξιδεύει χωρίς αλλαγή σχήματος, αυτή θα είναι και η κατανόηση μας εδώ. Έτσι, εάν μια λύση u(x, t) αντιπροσωπεύει ένα κύμα που ταξιδεύει, το σχήμα της λύσης αυτής θα να είναι η ίδια για όλο το χρόνο και η ταχύτητα εξάπλωσής της θα είναι μια σταθερά, η οποία συμβολίζουμε με c. Αν παρατηρήσουμε αυτό το κύμα σε ένα κινούμενο σύστημα αναφοράς με ταχύτητα c η κυματική μορφή θα εμφανίζεται σταθερά. Ένας μαθηματικός τρόπος ώστε να πούμε ότι αυτό ισχύει είναι αν η εξίσωση (3.1.1) έχει λύσεις της μορφής

$$u(x,t) = u(x-ct) = u(z), \quad z = x-ct\,. \qquad (3.1.2)$$

Τότε το u(x, t) είναι ένα διαδιδόμενο κύμα, και κινείται με σταθερή ταχύτητα c στο θετικό ημιάξονα 0x.Είναι προφανές ότι αν η x-ct είναι σταθερή, τότε είναι σταθερό και το u.

Ένα κύμα που κινείται στην αρνητική διεύθυνση του άξονα χχ' είναι της μορφής u (x + ct).

Η ταχύτητα c του κύματος πρέπει να προσδιοριστεί. Η εξαρτημένη μεταβλητή z ονομάζεται μεταβλητή κύματος. Όταν ψάχνουμε για λύσεις κυμάτων διάδοσης μιας εξίσωσης ή ενός συστήματος εξισώσεων ως προς x και t, της μορφής (3.1.2), έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \text{ και } \frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Έτσι, οι μερικές διαφορικές εξισώσεις ως προς x και t γίνονται συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως προς το z. Για να είναι ρεαλιστικό το u(z) πρέπει να ορίζεται για όλα τα z και για τις εφαρμογές που μας απασχολούν μη αρνητικό.

Είναι μέρος της κλασικής θεωρίας των γραμμικών παραβολικών εξισώσεων όπως (3.1.1), ότι δεν υπάρχουν φυσικά ρεαλιστικές λύσεις οδεύοντων κυμάτων.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι ψάχνουμε για λύσεις της μορφής (3.1.2),τότε η (3.1.1) γίνεται

$$D\frac{d^2u}{dz^2} + c\frac{du}{dz} = 0 \Rightarrow u(z) = A + Be^{-\frac{cz}{D}}$$

όπου τα A και B είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Δεδομένου ότι το u πρέπει να ορίζεται για όλα τα z, το B θα πρέπει να είναι μηδέν, δεδομένου ότι η εκθετική τείνει στο άπειρο καθώς z → - ∞. Το u (z) = A, μια σταθερά, η οποία δεν αποτελεί λύση κύματος. Σε αξιοσημείωτη αντίθεση η παραβολική εξίσωση διάχυσης αντίδρασης (3.1.2) μπορεί να παρουσιάσει λύσεις κυμάτων διάδοσης, ανάλογα με τη μορφή της αντίδρασης / αλληλεπίδρασης τού όρου f(u).

Αν και τα πιο ρεαλιστικά μοντέλα βιολογικού ενδιαφέροντος περιλαμβάνουν περισσότερες από μία διαστάσεις και περισσότερες από μία εξαρτημένες μεταβλητές, είτε συγκέντρωσης είτε πληθυσμού, υπάρχουν αρκετά συστήματα πολλαπλών ειδών, τα οποία περιγράφονται ικανοποιητικά από σύστημα μιας εξίσωσης.

Στο κεφάλαιο αυτό λοιπόν θα αναφερθούμε σε δύο πολύ πρακτικά προβλήματα, το ένα θέμα αφορά στην οικολογία και το άλλο στην αναπτυξιακή βιολογία, όπου και τα δύο ανήκουν σε σημαντικούς τομείς όπου μοντελοποίηση τους έχει διαδραματίσει σημαντικό ρόλο.

Ο τρόπος με τον οποίο θα αντιμετωπίσουμε τα προβλήματα αυτά είναι χρησιμοποιώντας τη σχέση τους με τη θεωρία των διαδικασιών διάχυσης που αναπτύξαμε προηγουμένως.

3.3 Πρότυπα διάχυσης-αντίδρασης με συνάρτηση διάχυσης που εξαρτάται από την πυκνότητα

Στα υποδείγματα που είδαμε μέχρι τώρα ο συντελεστής διάχυσης D δεν εξαρτάται από τον πληθυσμό u. Εάν επιθυμούμε να εξετάσουμε πιο αληθοφανή υποδείγματα πρέπει να συμπεριλάβουμε όρους στο μοντέλο που περιγράφουν την εξάρτηση της συνάρτησης

διάχυσης από την στιγμιαία του πληθυσμού. Μια τέτοια επέκταση του μοντέλου ενσωματώνοντας την density-dependent diffusion είναι

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{\partial}{\partial x}\left[D(u)\frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

όπου χαρακτηριστικά $D(u) = D_0 u^m$, με Do και m θετικές σταθερές.

Σχόλιο (3.1)
Εδώ εξετάζουμε τις συναρτήσεις f(u) που έχουν δύο μηδενικές τιμές, μία για u = 0 και μία για u = 1. Εξισώσεις στις οποίες το f ≡ 0 μελετούνται ευρύτερα. Πιο συγκεκριμένο θεωρούμε
$f(u) = ku^p(1-u^q)$
όπου το p και το q είναι θετικές σταθερές. Με κατάλληλες κλίμακες του t και του x μπορούμε να απορροφήσουμε τις παραμέτρους k και Do και οι εξισώσεις που θα εξετάζουμε είναι της γενικής μορφής

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^p(1-u^q) + \frac{\partial}{\partial x}\left[u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right] \qquad (3.1.3)$$

όπου το p, το q και το m είναι θετικές παράμετροι.
Εάν αναπτύξουμε τον όρο διάχυσης πλήρως παίρνουμε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^p(1-u^q) + mu^{m-1}\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 + u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ο οποίος δείχνει ότι η μη γραμμική διάχυση μπορεί να θεωρηθεί ως συμβολή μιας ισοδύναμης μεταφοράς με την ταχύτητα $-mu^{m-1}\frac{\partial u}{\partial x}$.
Μπορούμε να πούμε ότι οι παραπάνω μορφές είναι μάλλον ειδικές. Εντούτοις με το ιδιαίτερο γεωγραφικό πλάτος η επιλογή του p, του q και του m τέτοιες μορφές μπορούν ποιοτικά να μιμηθούν τις
πιό περίπλοκες μορφές για τις οποίες μόνο οι αριθμητικές λύσεις είναι δυνατές.
Η χρησιμότητα των αναλυτικών λύσεων, φυσικά, είναι η ευκολία με την οποία μπορούμε να δούμε πώς οι λύσεις εξαρτώνται αναλυτικά από τις παραμέτρους. Κατά αυτόν τον τρόπο μπορούμε να συμπεράνουμε την ποιοτική συμπεριφορά των λύσεων των πιό περίπλοκων αλλά ρεαλιστικότερων εξισώσεων.
Υπάρχουν, επίσης, συχνά σοβαρές παγίδες, μια από τις οποίες είναι σημαντική και που δείχνουμε παρακάτω.

Για την εξίσωση Fisher-Kolmogoroff θεωρούμε πρώτα m = 0 και p = 1 και η (3.1.3) γίνεται

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1-u^q) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, q > 0$$

Δεδομένου ότι u = 0 και u = 1 είναι ομοιόμορφες καταστάσεις, ψάχνουμε τις διαδιδόμενες λύσεις κυμάτων στη μορφή

$$u(x,t) = U(z),$$
$$z = x - ct, U(-\infty) = 1, U(+\infty) = 0$$

όπου c > 0 είναι η ταχύτητα του κύματος που εμείς πρέπει να καθορίσουμε.
Η συνήθης διαφορική εξίσωση για το u(z) είναι

$$L(U)=U''+cU'+U(1-U^q)=0 \quad (3.1.4)$$

η λύση της οποίας καθορίζει τη μορφή του κύματος.

Αυτή η εξίσωση μπορεί φυσικά να μελετηθεί στο επίπεδο των φάσεων (U', U). Ας αναζητήσουμε τις λύσεις της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης της μορφής

$$U(z) = \frac{1}{(1+\alpha e^{bz})^s} \quad (3.1.5)$$

όπου το α, το b και το s είναι θετικές σταθερές που πρέπει να βρεθούν. Αυτή η μορφή ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες για z=±∞.
Λόγω της μορφής της εξίσωσης μπορούμε να πούμε σε αυτή τη φάση ότι το α είναι αυθαίρετο: μπορεί να ενσωματωθεί στον εκθέτη στη θέση του $b^{-1}\ln\alpha$ στο z.

Η αντικατάσταση της σχέσης (3.1.5) στην σχέση (3.1.4) δίνει, μετά από τετριμμένη άλγεβρα

$$L(U) = \frac{1}{(1+\alpha e^{bz})^{s+2}}\left\{\left[s(s+1)b^2 - sb(b+c)+1\right]a^2e^{2bz} + \left[2-sb(b+c)\right]ae^{bz} + 1 - \left[1+ae^{bz}\right]^{2-sq}\right\} \quad (3.1.6)$$

Για να ισχύει L(U) = 0 για κάθε z θα πρέπει όλοι οι συντελεστές μέσα στα άγκιστρα να είναι μηδέν και αυτό οδηγεί στις σχέσεις
2-sq=0, 1 ή 2 =>s=2/q, 1/q ή sq=0.

Όμως η περίπτωση sq = 0 δεν είναι δυνατή δεδομένου ότι το s και το q είναι θετικές σταθερές. Εξετάζουμε λοιπόν τις άλλες δύο περιπτώσεις.

Για s = 1/q οι συντελεστές των εκθετών από (3.1.6) δίνουν

$$\begin{cases} e^{bz} : 2 - sb(b+c)^{-1} = 0 \Rightarrow sb(b+c) = 1 \\ e^{2bz} : s(s+1)b^2 - sb(b+c) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow s(s+1)b^2 = 0 \Rightarrow b = 0$$

αφού s > 0. Αυτή η περίπτωση δεν είναι επομένως επίσης μια από τις περιπτώσεις αφού πρέπει απαραιτήτως b > 0.

Τελικά εάν s = 2/q οι συντελεστές θα είναι

$$\begin{cases} e^{bz} : 2 - sb(b+c) = 0 \Rightarrow sb(b+c) = 2 \\ e^{2bz} : s(s+1)b^2 - sb(b+c) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow s(s+1)b^2 = 1$$

τα οποία δίνουν το b και το c τέτοια ώστε

$$s = \frac{2}{q}, b = \frac{1}{[s(s+1)]^{\frac{1}{2}}}, c = \frac{2}{sb} - b$$

τα οποία μας ορίζουν τα

$$s = \frac{2}{q}, b = \frac{1}{[2(q+2)]^{\frac{1}{2}}}, c = \frac{q+4}{[2(q+2)]^{\frac{1}{2}}}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η ταχύτητα του κύματος c αυξάνεται σύμφωνα με το q>0.Για το S θα έχουμε

$$S = \frac{b}{(1+\frac{1}{s})^{s+1}} = \frac{\frac{1}{2}q}{(1+\frac{q}{2})^{\frac{3}{2}+\frac{2}{q}}}.$$

Οπότε όσο αυξάνεται το q, η ταχύτητα του κύματος επίσης αυξάνεται ενώ μειώνεται το S. Όταν έχουμε q=1 τότε

$$s = 2, b = \frac{1}{\sqrt{6}}, c = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

και έχουμε μια ακριβή λύση διαδιδόμενου κύματος για την οποία η παράμετρος α μπορεί να επιλεγεί ώστε z=0 το οποίο μας δίνει U=1/2 για την περίπτωση α=$\sqrt{2}-1$ και η λύση θα είναι

$$U(z) = \frac{1}{\left[1 + (\sqrt{2}-1)e^{\frac{z}{\sqrt{6}}}\right]^2}$$

η οποία έχει ταχύτητα κύματος c=$\frac{5}{\sqrt{6}}$ και στη σύγκριση με την ασυμπτωτική λύση O (1) είναι πολύ πιό απότομο.

3.4 Εισαγωγή στα πρότυπα μορίων

Υπάρχουν βασικά δύο τρόποι να εξετάσουμε την κίνηση μιας ομάδας μορίων. Η πρώτη προσέγγιση είναι να περιγραφεί τι συμβαίνει σε ένα σταθερό σημείο (ή την περιοχή) στο διάστημα και το χρόνο, και αυτό καλείται "Eulerian view point". Αυτό επιτρέπει την παρατήρηση των φαινομένων σε μια συγκεκριμένη θέση.
Η άλλη προσέγγιση (πιθανολογική προσέγγιση), η "Lagrangian" μέθοδος, ακολουθεί την κίνηση των μορίων και επιτρέπει την παρατήρηση των διακυμάνσεων στην πορεία τους.

3.5 Διάχυση και διασπορά

3.5.1 Μοριακή διάχυση

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται κάποιες εξισώσεις όπως επίσης και η μοριακή διάχυση. Η μοριακή διάχυση αυτή καθεαυτή δεν έχει μεγάλες επιρροές στα περιβαλλοντικά προβλήματα, πρέπει όμως να ληφθοεί υπόψη μόνο σε μια μικροσκοπική κλίμακα. Εντούτοις, σε πολλές περιπτώσεις τα περιβαλλοντικά προβλήματα διασποράς μπορούν να περιγραφούν με τις διαδικασίες που είναι έντονα ανάλογες με τη μοριακή διάχυση, αλλά σε μεγαλύτερης κλίμακας.
Επίσης, η μοριακή διάχυση διαδραματίζει έναν σημαντικό ρόλο στα μοντέλα πολλών σωματιδίων.
Ο νόμος της μοριακής διάχυσης διατυπώθηκε αρχικά από έναν γερμανικό φυσιολόγο Adolph Fick. Ο νόμος του Fick λέει ότι η ροή της μάζας διαλυτής ουσίας, δηλαδή η μάζα μιας διαλυτής ουσίας που διασχίζει μια μονάδα ανά χρόνο μονάδων σε μια δεδομένη κατεύθυνση, είναι ανάλογη προς την κλίση της συγκέντρωσης διαλυτής ουσίας σε εκείνη την κατεύθυνση

3.5.2 Η μοριακή διάχυση με σταθερό συντελεστή διάχυσης

Η διάχυση πραγματοποιείται σε διαφορετικές κλίμακες, η μικρότερη είναι σε μοριακό επίπεδο. Αρχικά θα υποθέσουμε ότι ο συντελεστής διάχυσης είναι σταθερός. Κατά την εξέταση μιας μοριακής διάχυσης,ο νόμος Fick που διαδραματίζει έναν μεγάλο ρόλο.
• Ο νόμος του Fick δηλώνει ότι «η μάζα μιας διαλυτής ουσίας που διασχίζει μια περιοχή μονάδων ανά χρόνο μονάδων
σε μια δεδομένη κατεύθυνση είναι ανάλογη προς την κλίση της συγκέντρωσης διαλυτής ουσίας σε εκείνη την
κατεύθυνση».

• Μια άλλη σχέση μεταξύ της ροής και της συγκέντρωσης ανεξάρτητα από τη μεταφορά μορίων προέρχεται από τη συντήρηση της μάζας. Συνδυάζοντας αυτήν την σχέση με το νόμο του Fick η ακόλουθη εξίσωση διάχυσης σε τρεις διαστάσεις μπορεί να ληφθεί

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)$$

όπου C(t;x,y,z) για τη συγκέντρωση σε kg/m^3 και το D είναι ο συντελεστής διάχυσης m^2/s ακόμα και στο μοριακό επίπεδο. Στο έτος 1828 ο Γάλλος βοτανολόγος R.Brown όταν παρατήρησε μια μόλυνση του μορίου που ανεστάλη στο ρευστό, σημείωσε ότι κινούταν με έναν ανώμαλο και τυχαίο τρόπο. Η συνεχής κίνηση των μορίων του ρευστού, που έρχονται σε επαφή με τα μόρια της μόλυνσης, προκαλεί αυτή την ανώμαλη κίνηση των μορίων της μόλυνσης.
Αυτή η σύγκρουση κάνει το μόριο να "ξεχάσει" την ιστορία της διαδρομής των προηγούμενων ταχυτήτων τους.
Το 1905 ο Einstein πρότεινε ότι η εξίσωση διάχυσης θα μπορούσε να διαμορφωθεί ως στοχαστική διαδικασία Brown. Έδειξε ότι εφ' όσον ο συντελεστής διάχυσης παραμένει σταθερός, η μέση τετραγωνική απόσταση πέρα από την οποία ένα ενιαίο μόριο που ταξίδεψε από την αφετηρία ήταν γραμμικά ανάλογο προς το χρόνο.

$$\left\langle x^2 \right\rangle = 2Dt \qquad (3.1.7)$$

όπου < > σημαίνει το μέσο όρο πολλών δοκιμών, D είναι ο συντελεστής διάχυσης (m^2/s, ο D ορίζεται ως μια περιοχή μονάδων ανά χρόνο μονάδων) και είναι ανεξάρτητος από τη διάσταση της διαδικασίας, το t είναι χρόνος και το x είναι η απόσταση.
Δεδομένου ότι ο χρόνος αυξάνεται, η πιθανότερη θέση του μορίου θα ήταν σε μια επεκταμένος σφαιρική επιφάνεια με τη θέση του μορίου στο κέντρο της. Σε αυτόν τον τομέα της επιφάνειας που αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο καθώς η απόσταση της επιφάνειας από την αφετηρία αυξάνεται με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου. Κατά αυτόν τον τρόπο, ο συντελεστής διάχυσης φαντάζει ως ποσοστό στο οποίο εκείνη η "σφαίρα πιθανότητας αυξάνεται".
Έχει αποδειχθεί ότι εάν η συγκέντρωση ερμηνεύεται ως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τότε η εξίσωση διάχυσης γίνεται σύμφωνη με ένα πρότυπο μορίων Heemink.
Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα του μονοδιάστατου μοντέλου διάχυσης με δύο διαφορετικούς τρόπους επίλυσης.
Ας εξετάσουμε τώρα το μονοδιάστατο μοντέλο της διάδοσης ενός σύννεφου μόλυνσης σε ένα κανάλι με σταθερό συντελεστή βάθους και διάχυσης. Αυτήν τη στιγμή δεν εξετάζουμε τη μετατόπιση, κατά συνέπεια μόνο υποθέτουμε τη διασπορά του σύννεφου των μορίων.
Χρήσιμο είναι στο σημείο αυτό να δώσουμε τον ορισμό της συνάρτησης Dirac.

Ορισμός (3.2)
Η συνάρτηση Δέλτα (δ) του Dirac ορίζεται από την ακόλουθη ιδιότητα

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

με

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\delta(t) = 1$$

αν το 0 ανήκει στο διάστημα $[t_1, t_2]$.

Μπορούμε επίσης να δούμε τη συνάρτηση και ως ένα "Γκαουσιανό" όριο δηλαδή

$$\delta(t) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

Μια σημαντική ιδιότητα της συνάρτησης δ είναι η παρακάτω σχέση

$$\int dtf(t)\delta(t) = f(0)$$

για κάθε συνάρτηση f(t) η οποία μπορεί να γραφεί πιο γενικά και ως

$$\int dtf(t)\delta(t - t_0) = f(t_0).$$

Σχόλιο (3.3)
Τυπικά η συνάρτηση δ λέγεται κατανομή και είναι μια γενικευμένη ιδέα συναρτήσεων αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο εντός ολοκληρωμάτων. Το ολοκλήρωμα $\int dt\delta(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως χειριστής ο οποίος οδηγεί την τιμή μιας συνάρτησης στο 0.

Η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της συγκέντρωσης αυτής της διαδικασίας, με την αρχική επέκταση των μορίων για x = 0 στο χρόνο t = to δίνεται από:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right), \\ &C(t_0, x) = \delta(x) \end{aligned} \qquad (3.1.8)$$

και οι λύσεις της εξίσωσης (3.1.8) από την αναπαράσταση των Feynman-Kac θα είναι

$$C(0, x) = f(x)$$

$$C(x,t) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x^2 - x)^2}{2t}} f(x^2)dx^2 = E[f(X_t)] = E[f(B_t)] = E[f(x + B_t)]$$

Σχόλιο (3.4)
Η λύση αυτής της εξίσωσης στις περιπτώσεις που η περιοχή είναι άπειρη δίνεται από

$$C(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{\frac{-x^2}{4Dt}}$$

Η συμπεριφορά του σύννεφου μόλυνσης μπορεί αφ' ενός να ληφθεί με διακριτοποίηση της εξίσωσης διάχυσης (3.1.8), αλλά μπορεί επίσης να ληφθεί καλά με τη χρησιμοποίηση της πιθανολογικής προσέγγισης. Η παραδοσιακή κίνηση Brown μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαμορφώσει τη διαδικασία διάχυσης.
Η θέση του μορίου είναι τυχαία κατανεμημένη ως εξής

$$\begin{aligned} dX_t &= \sigma dW_t, \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}, \qquad (3.1.9)$$

όπου το dWt είναι η τυποποιημένη κίνηση Brown με το E[dWt] = 0 και το E[dWtdWt] = dt. Η σταθερά σ είναι ένας δείκτης της έντασης της διάχυσης. Προκειμένου να γίνει αντιληπτό πώς η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτής της διαδικασίας ποικίλλει στο διάστημα και το χρόνο, χρησιμοποιούμε έναν τύπο μερικής διαφορικής εξίσωσης, αποκαλούμενη Fokker-Planck εξίσωση.
Για αυτό το ιδιαίτερο παράδειγμα η Fokker-Planck εξίσωση για την εξίσωση πυκνότητας πιθανότητας p(t,x) περιγράφεται από

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \\ &p(t_0, x) = \delta(x - Xo) \end{aligned} \qquad (3.1.10)$$

Σημειώνουμε ότι αν κάποιος σκεφτεί από την άποψη των μορίων τότε πρέπει να συνειδητοποιήσει ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στη θέση είναι στην πραγματικότητα η συγκέντρωση σε εκείνη την θέση.
Το C(t, x) σε μια ορισμένη θέση (t, x) δεν είναι τίποτα περισσότερο από την πιθανότητα που έχει ένα μόριο να καταλήξει σε εκείνη την θέση τη χρονική στιγμή t.
Κατά συνέπεια, όταν αντικαταστήσουμε $\sigma = \sqrt{2Dt}$ αυτό προέρχεται από την εξίσωση (3.1.7) και p(t, x) = C(t, x) στην εξίσωση (3.1.10)
καταλήγουμε με την αρχική εξίσωση διάχυσης (3.1.8).
Μπορεί να συναχθεί το συμπέρασμα ότι περιγράφουν την ίδια διαδικασία, και επομένως έχουν την ίδια λύση:

$$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-x}{2\sigma^2}} = \mathrm{N}(x;0,\sigma^2)$$

με το $\mathrm{N}(x;0,\sigma^2)$ είναι μια κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ίση με σ^2.
Επομένως η εξίσωση (3.1.9) είναι σύμφωνη με την εξίσωση (3.1.8). Αφ' ενός, η Eulerian προσέγγιση είναι μια εναλλακτική λύση σε μια Lagrangian προσέγγιση όπου κάποιος μπορεί

να ακολουθήσει τις διαδρομές των μεμονωμένων μορίων που περιγράφονται από τις στοχαστικές εξισώσεις διάχυσης.
Σημειώστε ότι η Fokker-Planck εξίσωση είναι ένας τύπος μετατόπιση-διάχυσης της συνηθισμένης διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει την εξέλιξη της υπό όρους λειτουργίας της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.

3.5.3. Διάδοση μάζας μόλυνσης σε υγρό

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα για τη διάδοση της μάζας μιας μόλυνσης σε υγρό.

Παράδειγμα
Για τη γενικότερη μονοδιάστατη στοχαστική διαφορική εξίσωση και δεδομένης της εξίσωσης του Itό έχουμε

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW(t) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Η συνάρτηση μετάβασης πυκνότητας πιθανότητας $p = p(t, x/t_0, x_0)$ της στοχαστικής διαδικασίας Xt διαδίδεται σύμφωνα με την ακόλουθη Fokker-Planck εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y}(f(t,x)p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(g(t, X_t)p) \\ p(t, x/t_0, x_0) &= \delta(x - X_0) \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση (3.1.11) πρέπει να ερμηνευθεί υπό την έννοια του θεωρήματος του Itό και αυτό για να είναι σύμφωνη με την εξίσωση Fokker-Planck, της οποίας η λύση είναι η υπό όρους συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που συνδέεται με τη λύση Xt της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Επομένως, η διαφορική εξίσωση (3.1.12) είναι απολύτως σύμφωνη με τη Lagrangian περιγραφή της εξίσωσης (3.1.11).
Δίνει μια πλήρη περιγραφή της διακύμανσης στο χρόνο και στο χώρο της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.
Για μια μονοδιάστατη διαδικασία διάχυσης, ο νόμος του Fick μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά ως εξής

$$q = -D\frac{\partial C}{\partial x} \tag{3.1.13}$$

όπου το q είναι η μαζική ροή διαλυτής ουσίας, C είναι η συγκέντρωση και το D είναι ο συντελεστής της αναλογικότητας,
αποκαλούμενος και ως συντελεστής διάχυσης. Το μείον δείχνει ότι η μεταφορά είναι από υψηλή σε χαμηλή συγκέντρωση.
Για τη διάχυση σε τρεις διαστάσεις ο νόμος Fick μπορεί να γραφτεί ως

$$q = -D(\frac{\partial C}{\partial x_1} + \frac{\partial C}{\partial x_2} + \frac{\partial C}{\partial x_3}) \qquad (3.1.14)$$

Οι εξισώσεις (3.1.13) και (3.1.14) μπορεί να γραφτεί με μια άλλη μορφή εάν χρησιμοποιήσουμε το νόμο διατήρησης της μάζας.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial^2 x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_3^2}\right)$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις περιγράφουν τη διάδοση της μάζας σε ένα ρευστό χωρίς τη μέση ταχύτητα.
Παρακάτω θα καλύψουμε το θέμα της ομογενοποίησης (ή ασυμπτωτικής ανάλυσης) των περιοδικών δομών. Θα εισάγουμε, επίσης, εν συντομία ένα πρότυπο πρόβλημα στην περιοδική ομογενοποίηση, καθώς και μια συνηθισμένη μέθοδο επίλυσης.

3.5.4 Ασυμπτωτική ανάλυση περιοδικών δομών

Σε πολλούς τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας πρέπει να λυθούν τα προβλήματα συνοριακών τιμών σε περιοδικά μέσα. Αρκετά συχνά το μέγεθος της περιόδου είναι μικρό έναντι του μεγέθους του μέσου ενός δείγματος και, θεωρώντας ως ε την αναλογία τους, η ασυμπτωτική ανάλυση είναι αυτή που θα μας οδηγήσει σε λύση, καθώς το ε τείνει στο μηδέν. Με άλλα λόγια, ξεκινώντας από μια μικροσκοπική περιγραφή ενός προβλήματος, επιδιώκουμε μια μακροσκοπική. Αυτή η διαδικασία δημιουργίας μιας ασυμπτωτικής ανάλυσης και η επιδίωξη υπολογισμού του μέσου όρου καλείται ομογενοποίηση. Εδώ, εστιάζουμε στις περιοδικές δομές ομογενοποίησης, αλλά υπενθυμίζουμε ότι η ομογενοποίηση δεν είναι περιορισμένη σε εκείνη τη συγκεκριμένη περίπτωση και μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε είδος διαταραγμένων μέσων.
Για να καθορίσουμε τις ιδέες, θεωρούμε το γνωστό πρότυπο πρόβλημα στην ομογενοποίηση δηλαδή μια γραμμική δεύτερης τάξης μερική διαφορική εξίσωση με περιοδικούς συντελεστές. Ένα τέτοιο πρότυπο εξίσωσης, παραδείγματος χάριν, είναι η επιβολή θερμότητας σε ένα περιοδικό σύνθετο μέσο διάδοσης. Καλούμε το Ω υλική περιοχή (ένα οριακό ανοικτό σύνολο στον $\Re^N$), ε η περίοδος και το Y το κύτταρο μονάδων (δηλ. Y = $[0;1]^N$). Δείχνοντας από την f την πηγή
(μια συνάρτηση του $L^2(\Omega)$), και επιβάλλοντας έναν όρο ορίου Dirichlet για τον άγνωστο u_ε η εξίσωση γίνεται

$$\begin{cases} -div\left(A(\frac{x}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon\right) = f, \sigma\tau o\nu\Omega \\ u_\varepsilon = 0, \sigma\tau o\nu\partial\Omega \end{cases} \qquad (3.1.15)$$

όπου το A(y) είναι ένας πίνακας $L^{\infty}(Y)$ (οι συντελεστές διάχυσης), Y - περιοδικός στο y, με την ιδιότητα να υπάρχουν δύο θετικές σταθερές
$0 < \alpha < \beta$ τέτοιες ώστε

$$\alpha|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{N} A_{i,j}(x,y)\xi_i\xi_j \le \beta|\xi|^2 \text{ ,για κάθε } \xi \text{ που ανήκει στον } \Re^N \qquad (3.1.16).$$

Σύμφωνα με την υπόθεση (3.1.16), είναι γνωστό ότι η εξίσωση (3.1.15) έχει μια μοναδική λύση $u_\varepsilon \in \mathrm{H}_0^{\,1}(\Omega)$ που ικανοποιεί τη a priori εκτίμηση πως

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathrm{H}(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

όπου το C είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από το Ω και το α, και όχι από το ε και την f.
Εφόσον η ακολουθία $\{u_t\}$ είναι φραγμένη στον $H_0^1(\Omega)$ λόγω της ανακλαστικότητας του χώρου αυτού, από το Θεώρημα Eberlem-Smulian υπάρχει υπακολουθία $\{u_{t_k}\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς στο κάτω σύνορο $u \in H_0^1$.

Η ομογενοποίηση της σχέσης (3.1.15) υπολογίζει να βγάλει μια εξίσωση που να αναγνωρίζει το οριακό u ως μοναδική λύση της.
Η κλασσική μέθοδος για την ομογενοποίηση του προβλήματος είναι σε πρώτη φάση, η πολύ καλή γνώση της δευτέρου βαθμού ασυμπτωτικής μεθόδου που εφαρμόζεται προκειμένου να βρεθεί η ακριβής μορφή της ομογενοποιημένης εξίσωσης. Η βασική μέθοδος είναι να τεθεί ως δεδομένο την ακόλουθη σχέση για το u_ε

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \ldots$$

όπου κάθε όρος u (x, y) είναι Y - περιοδικό στο y. Η παραπάνω σχέση παρεμβάλλεται στην εξίσωση (3.1.15), και μια γεωμετρική σειρά στο ε λαμβάνεται από την εφαρμογή του κανόνα της διαφοροποίησης

$$\frac{\partial}{\partial x}u_i(x,\frac{x}{\varepsilon}) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^{-1}\frac{\partial u_i}{\partial y}(x,\frac{x}{\varepsilon}).$$

Έπειτα υπολογίζουμε τις σταθερές της σειράς στο μηδέν οδηγούμαστε σε μια σειρά εξισώσεων.
Κατά συνέπεια, η μέθοδος της two-scaled ασυμπτωτικής επέκτασης χρησιμοποιείται μόνο για να υποθέσουμε τη μορφή της ομογενοποιημένης εξίσωσης, και ένα δεύτερο βήμα απαιτείται για να αποδείξει τη σύγκλιση της ακολουθίας u_ε στο u.
Για το σκοπό αυτό, πολλές μέθοδοι είναι διαθέσιμες αλλά η γενικότερη και πιο ισχυρή είναι η αποκαλούμενη ενεργειακή μέθοδος.

Τέλος, είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη χρήση της εργοδικής θεωρίας για την διαδικασία διάχυσης δηλαδή

$$dX_t = -\sigma(\frac{x}{t})dW(t)\text{, όπου } \sigma\sigma^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}(\frac{x}{t}).$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Υπό συνθήκη Μέση Τιμή

Έστω δυο τυχαίες μεταβλητές X,Y με Y να παίρνει τιμές απο το R και X συγκεκριμένες τιμές.έστω οτι γνωρίζουμε την τιμή του X και θέλουμε να υπολογίσουμε μια εκτιμώμενη τιμή για το Y λαμβάνοντας υπ'όψιν το X.

Ας υποθέσουμε λοιπόν οτι γνωρίζουμε { X=j },για j που προφανώς μπορεί να παρατηρηθεί.Η εκτίμηση του Y θα αλλάζει για κάθε j.Έτσι αν θεωρήσουμε Q(Λ)=P(Λ/X=j) θα ήταν προτιμότερο να υπολογίσουμε την τιμή $E_Q\{Y\}$ από το να υπολογίσουμε την $E_p\{Y\}$

Υπό Συνθήκη Μέση Τιμή E(X/Y)

Έστω X με τιμές $\{ \chi_1, \chi_2, ..., \chi_n, ... \}$ και Y τυχαία μεταβλητή. Άν $P(X = \chi_j) > 0$ τότε η υπο συνθήκη μέση τιμή του Y δοθέντος { X=j } δίνεται από τη σχέση

$$E\{Y / X = \chi_j\} = E_Q\{Y\}$$

Όπου Q η πιθανότητα Q(Λ)=P(Λ/X=j) και $E_Q\{|Y|\} < \infty$

Η ιδέα της υπο συνθήκη Μέση τιμή δοθέντος μιας σ-άλγεβρας είναι οτι υπάρχει μια σ-υποάλγεβρα *G* της *F*αποτελούμενη απο συναρτήσεις μετρήσιμες στη σ-άλγεβρα *F* με τυχαίες μεταβλητές οι οποίες μεταφέρουν μερικώς πληροφορίες για το αποτέλεσμα της διαδικασίας.

Υπο Συνθήκη Μέση Τιμή E(X/*G*)

Έστω χώρος πιθανότητας (Ω,*F*,μ) και υπόχωρος $G \subset F$.

Μια τυχαία μεταβλητή $\hat{X} \in L^2(\Omega, G, \mu)$ καλείται Conditional Expectation του X δοθέντος της σ-Field G με $X \in L^2(\Omega, F, \mu)$ και συμβολίζουμε με $\hat{X}$=E(X/*G*) αν

i) $\hat{X}$ δεν περιλαμβάνει καμία επιπλέον πληροφορία παρα μόνον αυτές που περιλαμβάνονται στο χώρο *F:* $\sigma(\hat{X}) \subset F$

ii) $\hat{X}$ επαληθεύει τη σχέση

$$E[XZ]=E[\hat{X}Z], \quad \forall Z \in L^2(\Omega, G, \mu) \quad (I)$$

Μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (I) ως

$$E[(X - \hat{X})Z] = 0, \ \forall Z \in L^2(\Omega, G, \mu) \quad (II)$$

Ιδιότητα Martingale

Αρχικά ας δώσουμε τον ορισμό των Martingales.Έστω T ένα διάστημα του $\mathcal{R}$ ή ένα σύνολο θετικών ακέραιων

Ορισμός (1.2)

Ένα φίλτρο στο T είναι μια αύξουσα οικογένεια $\{\mathcal{F}_t | t \in T\}$ σ-χώρων.Μια στοχαστική ανέλιξη $X_t, t \in T$ θα λέμε ότι είναι προσαρμοσμένη στο $\{\mathcal{F}_t | t \in T\}$ εάν για κάθε t,η τυχαία μεταβλητή X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη.

Επίσης θα θεωρούμε ότι όλοι οι σ-χώροι είναι πλήρεις δηλαδή αν A ∈ $\mathcal{F}$ και P(A)=0 τότε και για κάθε B υποσύνολο του A ισχύει B ∈ $\mathcal{F}$.

Ορισμός (1.3)
Έστω X_t μια στοχαστική ανέλιξη προσαρμοσμένη στο φίλτρο $\{\mathcal{F}_t\}$ και ισχύει $E|X_t| < \infty$ για κάθε $t \in T$.
Τότε η X_t θα είναι Martingale ως προς το $\{\mathcal{F}_t\}$ εάν για κάθε s ≤ t στο T ισχυει $E\{X_t|\mathcal{F}_s\} = X_s$, σχεδόν βέβαια

Θεώρημα (1.4) (Doob submartingale inequality)
Έστω X_t δεξιά συνεχής Martingale δηλαδή σχεδόν όλα τα τυχαία μονοπάτια της είναι συνεχείς από δεξιά συναρτήσεις στο[a,b] και $\alpha \le t \le b$.Οπότε για κάθε $\varepsilon > 0$ θα έχουμε

$$P\left\{\max_{a\le t\le b}|X_t| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{1}{\varepsilon}E|X_b|$$

Θεώρημα (1.5) (Borel-Cantelli Λήμμα)
Έστω μια ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n\}$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.
Τότε $P(\{A_n, απείρως\ συχνά\}) = 0$.

Σημείωση (1.2)
Η σημασία της φράσης «απείρως συχνά» για την ακολουθία $\{A_n\}$

$$\{A_n, απείρως\ συχνά\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Λήμμα (1.6) (Gronwall)
Έστω συνάρτηση $\varphi \in L^1[a,b]$ για την οποία $\varphi(t) = f(t) + m\int_a^t \varphi(s)ds$,

$$\forall\ t \in [a,b]\ , f \in L^1[a,b]\ , m\ θετική\ σταθερά.$$

Τότε έχουμε

$$\varphi(t) \le f(t) + m\int_a^t f(s)e^{m(t-s)}ds.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Hui-Hsiung Kuo "Introduction to Stochastic Integration" (Springer 2000)
- Kosaku Yoshida "Functional analysis" (Springer - Verlag 1980)
- J.D. Murray "Mathematical Biology" (Springer)
- Α.Ν. Γιαννακόπουλος "Στοχαστική ανάλυση και εφαρμογές στη χρηματοοικονομική" (Διδακτικές σημειώσεις) *(2003)*
- W.M. Charles and J.A.M. van der Weide "Stochastic Differential Equations. Introduction to Stochastic Models for Pollutants Dispersion, Epidemic and Finance" (2011)
- K.L. Chung and R.J. Williams "Introduction to stochastic integration" (Birkhauser 1990)
- Henrik Madsen "Ito Integrals" (2006)