



MEASURING THE RISK OF HEDGE FUNDS

(ΕΚΤΙΜΩΝΤΑΣ ΤΟΝ ΚΙΝΔΥΝΟ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ)

MAPIANA BOYTSINOY



Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση των
απαραιτήτων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

AΘΗΝΑ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ, 2007

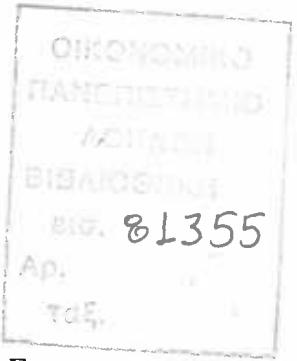




KATAJOLE

OKONOMIKO PANEPISTHMO AGHNUN





Εγκρίνουμε τη διατριβή της ΒΟΥΤΣΙΝΟΥ ΜΑΡΙΑΝΑΣ

[ΒΡΟΝΤΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ]
[ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ]

Βρόντος Ιωάννης
[ΥΠΟΓΡΑΦΗ]

[ΓΙΑΜΟΥΡΙΔΗΣ ΔΑΝΙΗΛ]
[ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ]

[ΥΠΟΓΡΑΦΗ]

[ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ]

23/1/2007



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	vi
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	viii
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ I	
ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ	4
1. ΟΡΙΣΜΟΣ	4
2. ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ	5
i. TACTICAL TRADING	5
ii. EQUITY LONG/SHORT	6
iii. EVENT DRIVEN	7
iv. RELATIVE VALUE ARBITRAGE	7
v. COMBINED STRATEGIES	8
3. ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΤΕΣ ΤΩΝ HEDGE FUNDS Vs ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥΣ ΕΠΕΝΔΥΤΕΣ	11
4. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΙΚΙΛΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ	12
5. ΜΕΡΟΛΗΨΙΕΣ ΣΤΙΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΤΩΝ HEDGE FUNDS	13
i. SURVIVORSHIP BIAS	13
ii. Μη-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ (NONLINEARITY)	15
ΚΕΦΑΛΑΙΟ II	
ΑΞΙΑ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ - VALUE AT RISK	20
1. ΟΡΙΣΜΟΣ	20
2. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ	21
2.1. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ	21
2.1.1. ΜΕΘΟΔΟΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ-ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ & ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΟΥ ΚΙΝΗΤΟΥ ΜΕΣΟΥ	22
2.1.2. ΠΛΗΡΩΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ: LOCATION-SCALE	23
2.1.2.A. ARCH(p,q)	23
2.1.2.B. GARCH(p,q)	25
2.1.2.B.i. GARCH-N (ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ)	



2.1.2.b.ii. GARCH-T (ΚΑΤΑΝΟΜΗ T-STUDENT)	26
2.1.2.b.iii.GARCH (ΚΑΤΑΝΟΜΗ GED)	27
2.1.2.b.iv.E-GARCH	28
2.1.2.b.v. T-GARCH	29
2.1.3. ΠΛΗΡΩΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ: ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ	29
2.1.3.a. MixN-GARCH(p,q)	29
2.1.4. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ	30
2.1.4.a. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ GARCH(p,q)	30
2.1.4.b. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ GARCH(p,q) ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ	31
2.1.4.g. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ O-GARCH(p,q)	31
2.2. ΜΗ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ	32
2.2.1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ	32
2.1.1.a. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ	34
2.1.1.b. ΦΙΛΤΡΑΡΙΣΜΕΝΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ	35
2.1.1.b.i. ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	35
2.1.1.b.ii. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	36
2.1.1.b.γ. ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ	38
3. ΕΚΤΙΜΗΣΗ	40
3.1. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ	40
3.2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΟΙΟΝΕΙ-ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ	41
3.3. Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ του BAYES	42
3.4. BOOTSTRAP ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ	43
ΚΕΦΑΛΑΙΟ III	
ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ	46
1. ΟΡΙΣΜΟΣ	46
2. ΜΕΘΟΔΟΙ	47
2.1. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ μ_{t+1} ΚΑΙ σ_{t+1} ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ PML	50
2.2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ z_q ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ (EVT)	52
2.3. ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ	60
2.4.ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ (QUANTILE REGRESSION M APPROACH)	



3. ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ GPD	64
ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV EXPECTED SHORTFALL	66
1. ΟΡΙΣΜΟΙ	67
1.1. VALUE AT RISK	67
1.2. EXPECTED SHORTFALL	67
2. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ	68
2.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ	68
2.2 ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ (GAUSSIAN APPROACH)	69
2.3. ΘΕΩΡΙΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ	69
2.4. ΣΤΑΘΕΡΗ PARETIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ	70
2.4.1. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ALPHA-STABLE ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	74
3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ HARMANTZIDIS, MIAO & CHIEN	77
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ	79
1. VAR ΜΕ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ ΡΟΠΩΝ	80
1.1. ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΡΟΠΩΝ	80
2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	82
2.1. ΈΛΕΓΧΟΣ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΤΗΣ VAR	83
2.2. «NONNESTED» VAR ΣΥΓΚΡΙΣΗ	84
2.3. ΣΥΝΔΥΣΜΟΣ VAR	86
3. ΔΟΜΗ ΓΙΑ ΕΛΕΓΧΟ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΚΑΛΥΨΗΣ	87
3.1. ΚΑΘΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΕΝΑ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΛΕΓΧΟΥ	87
3.2. ΕΝΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΛΕΓΧΟΥ	88
4. ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΚΑΛΥΨΗΣ	89
4.1. Ο LR ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΜΗ-ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΚΑΛΥΨΗ	89
4.2. Ο LR ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ	90
4.3. ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΛΥΨΗΣ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ	92
5. ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΙΚΗ ΔΟΜΗ	92
5.1. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ	92
5.2. ΈΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΙΣ ΟΥΡΕΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	92



5.3. ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΡΟΠΩΝ	95
6. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΣ ΑΠΩΛΕΙΑΣ	95
6.1. ΡΥΘΜΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΠΩΛΕΙΑΣ (RLF)	96
6.2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΠΩΛΕΙΑΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ (FLF)	97
6.3. ΈΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΕΡΟΧΗ ΚΑΠΟΙΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΚΑΠΟΙΟ ΆΛΛΟ ΣΕ ΟΡΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΠΩΛΕΙΑΣ	97
6.3.1. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	98
7. ΜΕΤΡΑ ΣΧΕΤΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ (MEASURES OF RELATIVE SIZE AND VARIABILITY)	99
7.1. ΜΕΣΟ ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ	99
7.2. ΡΙΖΑ ΜΕΣΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΣΧΕΤΙΚΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ	99
7.3. ANNUALIZED PERCENTAGE VOLATILITY	100
7.4. ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΗΝ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΠΟΛΥΤΗ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ	100
8. ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΠΗΓΗ ΤΗΣ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ	100
ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	104
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	131
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	132

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα κεφάλαια αντιστάθμισης του κινδύνου (*hedge funds*) αποτελούν μία εναλλακτική μορφή επένδυσης, που είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη σε όσους θέλουν να αναλάβουν και το ανάλογο ρίσκο. Δεν υπάρχει μια κοινά αποδεκτή ερμηνεία για το τι ακριβώς είναι τα κεφάλαια αντιστάθμισης του κινδύνου (*hedge funds*), ωστόσο αυτό που τα χαρακτηρίζει είναι ο στόχος τους για επίτευξη κερδών, ανεξαρτήτως των συνθηκών που επικρατούν στις αγορές.

Σε αντίθεση με τα αμοιβαία κεφάλαια, η επιτυχία των οποίων κρίνεται με βάση το αν κατάφεραν να ξεπεράσουν σε απόδοση τον βασικό δείκτη στις αξίες του οποίου επενδύουν, τα κεφάλαια αντιστάθμισης του κινδύνου (*hedge funds*) δεν ενδιαφέρονται για τέτοιου είδους συγκρίσεις. Στόχος τους είναι η καταγραφή υπεραξιών και μόνον.

Τα κεφάλαια αντιστάθμισης του κινδύνου (*hedge funds*), σε γενικές γραμμές, έχουν μεγαλύτερη ευελιξία συγκριτικά με τους «παραδοσιακούς» διαχειριστές κεφαλαίων, διότι μπορούν να επενδύσουν σε παράγωγα, να διατηρούν ρευστότητα σε όποιο επίπεδο επιθυμούν, καθώς και να επενδύουν κεφάλαια περισσότερα από αυτά που έχουν στη διάθεσή τους. Η μεγάλη αύξηση του αριθμού των εμπορεύσιμων χρηματοοικονομικών προϊόντων του εκάστοτε χαρτοφυλακίου ενός επενδυτή καθιστά την μέτρηση του κινδύνου της αγοράς (*market risk*) εξέχουσας σημασίας για τους ρυθμιστές και για τον εσωτερικό έλεγχο του κινδύνου. Ο κίνδυνος αγοράς είναι ο κίνδυνος μείωσης της αξίας μιας επένδυσης εξαιτίας αλλαγών στους παράγοντες που διαμορφώνουν την αξία της αγοράς. Τέσσερις τυπικοί παράγοντες είναι:

- ο χρηματιστηριακός κίνδυνος ή ο κίνδυνος αλλαγής των τιμών των μετοχών
- ο κίνδυνος επιτοκίου ή ο κίνδυνος αλλαγής των επιτοκίων
- ο νομισματικός κίνδυνος ή ο κίνδυνος πως οι συναλλαγματικές ισοτιμίες θα αλλάξουν
- ο κίνδυνος εμπορευμάτων, δηλαδή ο κίνδυνος της αλλαγής τιμών των εμπορευμάτων (όπως πετρέλαιο, μέταλλα)

Το πιο γνωστό μέτρο κινδύνου είναι η αξία σε κίνδυνο (*Value-at-Risk ή VaR*). Είναι μια μέτρηση που δηλώνει πώς η αξία στην αγορά ενός περιουσιακού στοιχείου ή χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων είναι πιθανόν να μειωθεί στη διάρκεια

μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Η αξία σε κίνδυνο αντικατοπτρίζει την επικινδυνότητα ενός χαρτοφυλακίου βάση της τρέχουσας σύνθεσής του.

Η αξία σε κίνδυνο, είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο που όμως ενέχει κάποια μειονεκτήματα. Αγνοεί τα ακραία γεγονότα και επικεντρώνεται στην εκτίμηση του κινδύνου που αφορά σε ολόκληρη την εμπειρική κατανομή των αποδόσεων. Αυτό το πρόβλημα έρχεται να καλύψει η θεωρία των ακραίων τιμών (*extreme value theory*). Η θεωρία των ακραίων τιμών καλύπτει το παραπάνω μειονέκτημα κάνοντας την καλύτερη χρήση κάθε πληροφορίας που μπορεί να αφορά σε ακραία γεγονότα.

Επιπλέον η αξία σε κίνδυνο δε δίνει ακριβείς εκτιμήσεις, κάτω από συνθήκες πίεσης στην αγορά. Τα υποδείγματα των αξιών σε κίνδυνο συνήθως βασίζονται σε αποδόσεις χρηματοοικονομικών προϊόντων που κατανέμονται κανονικά, αγνοώντας την ιδιότητα των παχιών ουρών των πραγματικών αποδόσεων και σαν αποτέλεσμα δε δίνουν ορθά αποτελέσματα κάτω από συνθήκες ακραίων διακυμάνσεων των τιμών. Το μειονέκτημα αυτό καλύπτει το *expected shortfall*, το οποίο εξορισμού λαμβάνει υπόψη του τις απώλειες πέραν του επιπέδου της εκτίμησης της *VaR*, δηλαδή καλύπτει ότι αδυνατεί να εκτιμήσει τη αξία σε κίνδυνο.

Ένα από τα πιο σημαντικά σημεία για την εκτίμηση του κινδύνου είναι η αξιολόγηση της εκτίμησης αυτής. Στην παρούσα μελέτη αναλύεται η μεθοδολογία αξιολόγησης των εκτιμήσεων της *VaR* ως προς την αποτελεσματικότητα, την ορθότητα της εξειδίκευσής της και το βαθμό κάλυψης αυτής.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ειλικρινά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ιωάννη Βρόντο για τη διαρκή και ατέρμονη επίβλεψη της μελέτης αυτής. Η μεγάλη βοήθεια, υπομονή, καθώς και η σωστή καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας αποτέλεσαν καθοριστικούς παράγοντες για την ολοκλήρωσή της.



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μελέτη αυτή πραγματεύεται εναλλακτικές μεθόδους- υποδείγματα μέτρησης του κινδύνου των κεφαλαίων αντιστάθμισης του κινδύνου (*hedge funds*) και μέτρα αξιολόγησης των εκτιμήσεων των υποδειγμάτων αυτών.

Το πρώτο κεφάλαιο ασχολείται με την ερμηνεία του όρου «κεφάλαια αντιστάθμισης κινδύνου» και την περιγραφή των στατιστικών ιδιοτήτων αυτών. Τα κεφάλαια αντιστάθμισης του κινδύνου είναι ιδιωτικά επενδυτικά κεφάλαια ελαφρώς ελεγχόμενα με κανόνες και περιορισμούς. Ο όρος «κεφάλαια αντιστάθμισης κινδύνου» χρησιμοποιείται για να διαφοροποιήσει τα κεφάλαια που δεν έχουν ιδιαίτερους κανονιστικούς περιορισμούς και είναι προσβάσιμα μόνο σε περιορισμένο αριθμό επενδυτών, καθένας από τους οποίους θα πρέπει να επενδύσει μεγάλα κεφάλαια σε «ιδιωτικές τοποθετήσεις».

Η σχετική απουσία κανονιστικής επίβλεψης καθιστά τα κεφάλαια αντιστάθμισης κινδύνου ιδιαίτερα ευλύγιστα σε όρους επενδυτικών στρατηγικών που μπορούν να νιοθετήσουν. Σε αντίθεση με τα αμοιβαία κεφάλαια που περιορίζονται στο να κατέχουν θέσεις “*long*” στην αγορά αγοράζοντας χρηματοοικονομικά προϊόντα όπως, ομόλογα, μετοχές ή χρηματικά κεφάλαια, και έχουν περιορισμένες δυνατότητες στο να συμμετέχουν σε συμβόλαια παραγώγων, τα κεφάλαια αντιστάθμισης κινδύνου δεν υπόκεινται σε τέτοιου είδους περιορισμούς. Οι επενδυτικές γενικές γραμμές και το είδος του κεφαλαίου, καθορίζουν το κατά πόσο τα κεφάλαια αντιστάθμισης μπορούν να πάρουν θέσεις “*short*” ή “*long*” στην αγορά. Είναι κεφάλαια που έχουν τη δυνατότητα να εισέλθουν σε συμβόλαια *futures*, *swaps* καθώς και σε άλλες κατηγορίες συμβολαίων παραγώγων. Σαν αποτέλεσμα τα κεφάλαια αντιστάθμισης έχουν τη δυνατότητα να συμμετέχουν σε πιο πολύπλοκα συμβόλαια και να έχουν κέρδη σε περιόδους μεγάλων διακυμάνσεων ή και πτώσεων των αγορών. Εξαιτίας του γεγονότος ότι απαιτούν ένα ελάχιστο όριο επενδυτικών κεφαλαίων είναι προσβάσιμα μόνο σε θεσμικούς επενδυτές.

Η μεγάλη αύξηση του αριθμού των εμπορεύσιμων χρηματοοικονομικών προϊόντων του εκάστοτε χαρτοφυλακίου ενός επενδυτή καθιστά την μέτρηση του κινδύνου της αγοράς (*market risk*) εξέχουσας σημασίας για τους ρυθμιστές και για τον εσωτερικό έλεγχο του κινδύνου. Η ορθή διαχείριση του κινδύνου με στόχο την ελαχιστοποίηση των ενδεχόμενων απωλειών, είναι εξέχουσας σημασίας για τη

διασφάλιση της βιωσιμότητας, της κερδοφορίας και της διαμόρφωσης και διατήρησης μιας «καλής» φήμης ενός χρηματοοικονομικού οργανισμού. Η αξία σε κίνδυνο (*value at risk-VaR*) είναι το πιο γνωστό μέτρο κινδύνου.

Η αξία σε κίνδυνο είναι μια τεχνική που χρησιμοποιεί στατιστικές αναλύσεις των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών προϊόντων και των διακυμάνσεων τους με στόχο την εκτίμηση της πιθανότητας ότι οι απώλειες ενός συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου θα ξεπεράσει μία συγκεκριμένη τιμή. Εναλλακτικά υποδείγματα εκτίμησης της αξίας σε κίνδυνο παρουσιάζονται στο δεύτερο κεφάλαιο. Είναι φανερό ότι η αξία σε κίνδυνο αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για πολλούς λόγους, μερικοί από αυτούς είναι η ανάλυση του κινδύνου, ο καθορισμός των ορίων του κινδύνου, η κεφαλαιακή διάρθρωση, η εσωτερική κατανομή των κεφαλαίων και τέλος αποτελεί μέτρο καθορισμού της επίδοσης επενδύσεων.

Δεν υπάρχει θεωρία που να αποδεικνύει ότι η αξία σε κίνδυνο είναι το κατάλληλο μέτρο πάνω στο οποίο μπορούν να βασιστούν κανόνες βέλτιστων αποφάσεων. Η αξία σε κίνδυνο δε μπορεί να εκτιμήσει τον κίνδυνο «γεγονότων», όπως για παράδειγμα ένα κραχ των χρηματοοικονομικών αγορών. Τέλος η αξία σε κίνδυνο δε μπορεί να λάβει υπόψη της όλη την πληροφόρηση για τον κίνδυνο της αγοράς, η καλύτερη χρήση της είναι ως εργαλείο στα χέρια ενός ικανού μάνατζερ. Παρόλο που δε μπορεί να αποτελέσει κανόνα είναι ένα πολλά υποσχόμενο εργαλείο.

Η αξία σε κίνδυνο, όπως αναφέραμε παραπάνω είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο που όμως ενέχει κάποια μειονεκτήματα. Αγνοεί τα ακραία γεγονότα και επικεντρώνεται στην εκτίμηση του κινδύνου που αφορά σε ολόκληρη την εμπειρική κατανομή των αποδόσεων. Οι επενδυτές ενδιαφέρονται κυρίως για τα γεγονότα που αφορούν στο αριστερό άκρο της κατανομής των αποδόσεων και για τα ακραία γεγονότα που μπορούν να οδηγήσουν σε μεγάλες χρηματοοικονομικές καταστροφές. Αυτό το πρόβλημα έρχεται να καλύψει η θεωρία των ακραίων τιμών (*extreme value theory*). Η θεωρία των ακραίων τιμών είναι ένα τμήμα της στατιστικής που προσπαθεί να κάνει την καλύτερη δυνατή χρήση κάθε πληροφορίας που μπορεί να αφορά σε ακραία γεγονότα και αναλύεται στο τρίτο κεφάλαιο.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της αξίας σε κίνδυνο είναι ότι δε λειτουργεί σωστά, δίνοντας ακριβείς εκτιμήσεις, κάτω από συνθήκες πίεσης στην αγορά. Τα υποδείγματα των αξιών σε κίνδυνο συνήθως βασίζονται σε αποδόσεις χρηματοοικονομικών προϊόντων που κατανέμονται κανονικά και δε δίνουν ορθά αποτελέσματα κάτω από συνθήκες ακραίων διακυμάνσεων των τιμών. Το γεγονός

ότι βασίζεται σε υποθέσεις κανονικότητας των αποδόσεων οδηγεί στο να αψηφά την ιδιότητα των παχιών ουρών των πραγματικών αποδόσεων και υποεκτιμά την πιθανότητα των ακραίων κινήσεων των τιμών. Εξορισμού η αξία σε κίνδυνο αγνοεί τις ακραίες απώλειες πέραν του επιπέδου εκτίμησης της *VaR*.

Σε μία προσπάθεια να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα που εμφανίζεται με τις εκτιμήσεις της αξίας σε κίνδυνο οι *Artzner et al.* (1997, 1999) πρότειναν τη χρήση του *expected shortfall* (τέταρτο κεφάλαιο). Το *expected shortfall* είναι η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή των απωλειών δοθέντος ότι οι απώλειες είναι πέραν του επιπέδου εκτίμησης της αξίας σε κίνδυνο. Εξορισμού λαμβάνει υπόψη του τις απώλειες πέραν του επιπέδου της εκτίμησης της *VaR*, δηλαδή καλύπτει ότι αδυνατεί να εκτιμήσει τη αξία σε κίνδυνο.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το επόμενο βήμα για την ολοκληρωμένη εκτίμηση του κινδύνου που είναι η αξιολόγηση της εκτίμησης αυτής. Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται η μεθοδολογία αξιολόγησης των εκτιμήσεων της *VaR* ως προς την αποτελεσματικότητα, την ορθότητα της εξειδίκευσής της και το βαθμό κάλυψης αυτής.

Τέλος στο έκτο κεφάλαιο γίνεται μια εφαρμογή των υποδειγμάτων και ανάλυση των αποτελεσμάτων αυτής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ (HEDGE FUNDS)

1. ΟΡΙΣΜΟΣ

Τα κεφάλαια αντιστάθμισης του κινδύνου είναι επενδυτικά μέσα οργανωμένα ιδιωτικά και διαχειριζόμενα από επαγγελματίες επενδυτικούς μάνατζερ. Σύμφωνα με τους *Frydenberg, Lindset και Westgaard (2006)* δεν είναι ευρύτατα διαθέσιμα στο κοινό. Εξαιτίας της ιδιωτικής φύσης τους, τα κεφάλαια αυτά έχουν λιγότερους περιορισμούς όσον αφορά στη χρήση της μόχλευσης, την πώληση *short (short-selling)* και τα παράγωγα, από ότι για παράδειγμα τα αμοιβαία κεφάλαια. Αυτό τους δίνει τη δυνατότητα να ακολουθούν επενδυτικές στρατηγικές που είναι σημαντικά διαφορετικές από τις μη-μοχλεύσιμες (*non-leveraged*), μόνο *long* στρατηγικές, που παραδοσιακά ακολουθούνται από τη «δεσπόζουσα τάξη» των επενδυτών.

Σύμφωνα με τους *Malkier και Saha (2004)*, ο όρος «κεφάλαια αντιστάθμισης-hedge funds» αφορά σε ετερογενείς ομάδες επενδυτικών κεφαλαίων. Οι ομάδες αυτές, εκτός από τα αμοιβαία κεφάλαια, παρουσιάζουν κοινά χαρακτηριστικά όπως σημαντική μόχλευση, κατέχουν *και long και short* θέσεις και συχνά περιέχουν πολύπλοκα στοιχεία στο χαρτοφυλάκιο τους όπως παράγωγα προϊόντα. Επιπλέον, οι αποδόσεις των κεφαλαίων αντιστάθμισης κινδύνου έχουν χαμηλή συσχέτιση με τη γενική αγορά κεφαλαίων (*general equity market*), και για αυτό το λόγο αποτελούν θαυμάσιους διαφοροποιητές (*diversifiers*).

Οι *Frydenberg, Lindset και Westgaard (2006)* υποστηρίζουν ότι υπάρχουν διάφοροι παράγοντες που εξηγούν την εκπληκτική ανάπτυξη των κεφαλαίων αντιστάθμισης κινδύνου. Ένας από τους παράγοντες είναι η άνευ προηγουμένου αύξηση του πλούτου κατά τη διάρκεια ανάπτυξης των αγορών κεφαλαίου. Το γεγονός αυτό αύξησε σημαντικά τον αριθμό των ιδιωτών επενδυτών. Ταυτόχρονα οι επενδυτές των χρηματοοικονομικών οργανισμών εκδηλώνουν ένα αρκετά μεγάλο ενδιαφέρον για την αγορά των κεφαλαίων αντιστάθμισης του κινδύνου. Ένας άλλος λόγος ήταν η έντονη ανάγκη για αποτελεσματικούς τρόπους διαφοροποίησης των χαρτοφυλακίων τις περιόδους πτώσης των αγορών κεφαλαίων και ομολόγων. Η δημιουργία μιας «σταθερής απόλυτης απόδοσης», ήταν ο κοινός στόχος των επενδυτών των χρηματοοικονομικών οργανισμών και των ιδιωτών επενδυτών.



2. ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Ο όρος «κεφάλαια αντιστάθμισης κινδύνου» χρησιμοποιείται γενικά, παρόλο που δεν είναι όλα τα κεφάλαια αντιστάθμισης όμοια. Στην πραγματικότητα, υπάρχει μία πληθώρα επενδυτικών κατηγοριών με πολύ διαφορετικές προσεγγίσεις και αντικειμενικούς σκοπούς. Για αυτό το λόγο, οι μέσες αποδόσεις και διακυμάνσεις διαφέρουν σημαντικά ανάμεσα στις διαφορετικές κατηγορίες των κεφαλαίων. Μερικές κατηγορίες των κεφαλαίων αντιστάθμισης έχουν μικρότερη διακύμανση από τις «μόνο-long» στρατηγικές των ιδίων κεφαλαίων και των ομολόγων, ενώ άλλες μπορούν να ανοίγουν και long και short θέσεις σε διαφορετικές αγορές έχοντας μεγαλύτερη διακύμανση:

Δυστυχώς δεν υπάρχει γενικά αποδεκτή κατηγοριοποίηση των διαφορετικών στρατηγικών, σύμφωνα με τους *Frydenberg, Lindset και Westgaard (2006)*. Κάθε ένας σύμβουλος, επενδυτής ή και διαχειριστής μπορεί να χρησιμοποιεί τα δικά του κριτήρια διαφοροποίησης. Οι *Frydenberg, Lindset και Westgaard (2006)* κατηγοριοποιούν τα κεφάλαια αντιστάθμισης του κινδύνου σε πέντε (5) κύριες ομάδες:

- i. *Tactical Trading*
- ii. *Equity Long/Short*
- iii. *Event Driven*
- iv. *Relative Value Arbitrage*
- v. *Combined Strategies*

Αυτές οι ομάδες χωρίζονται σε υπο-ομάδες επενδυτικών κατηγοριών. Πιο αναλυτικά:

i. TACTICAL TRADING

Η κατηγορία *Tactical Trading* αναφέρεται σε στρατηγικές οι οποίες κάνουν υποθέσεις για την πορεία των αγοραίων τιμών του συναλλάγματος, των προϊόντων, των ιδίων κεφαλαίων και/ή των ομολόγων σε συστηματική ή διακριτική (*discretionary*) βάση. Οι βασικές υποκατηγορίες της ομάδας αυτής είναι η *Global Macro* και η *Commodity Trading Advisors (CTAs)*:

- a. **Global Macro:** Αφορά σε κεφάλαια που έχουν ως στόχο την απόκτηση κέρδους από σημαντικές οικονομικές τάσεις και γεγονότα της παγκόσμιας οικονομίας, όπως μεγάλες αλλαγές των ισοτιμιών και των επιτοκίων. Αυτά τα κεφάλαια χρησιμοποιούν αρκετά τη μόχλευση και τα παράγωγα (*options*, *futures* και *swaps*). Οι διαχειριστές των κεφαλαίων *Global Macro* έχουν ως στόχο τις υψηλές αποδόσεις με μία πιο ελεύθερη («γενναιόδωρη») αντιμετώπιση ως προς τον κίνδυνο από ότι οι άλλες κατηγορίες.
- b. **Managed Futures / CTA:** Οι διαχειριστές αυτής της κατηγορίας ομαδοποιούν τα συμβόλαια που αφορούν σε προϊόντα και *futures* εκ μέρους των πελατών τους. Αυτοί οι «*traders*» χωρίζονται σε δύο ομάδες: (1) στους *συστηματικούς* (*systematic*) «*traders*», οι οποίοι αναλύουν ιστορικές τιμές και προσπαθούν να προβλέψουν τις μελλοντικές τιμές μέσω κάποιας εμπειρικής/ποσοτικοποιημένης δομής και (2) στους διακριτικούς (*discretionary*) «*traders*», ο οποίοι βασίζουν τις αποφάσεις τους σε μια λιγότερο μαθηματικοποιημένη βάση. Η μεθοδολογία τους τείνει να στηρίζεται στην εμπειρία και στις ικανότητες που αναπτύσσουν με τα χρόνια.

ii. EQUITY LONG/SHORT

Αυτή η στρατηγική περιλαμβάνει κεφάλαια που λαμβάνουν και *long* και *short* θέσεις στις αγορές κεφαλαίου. Σε αντίθεση με τα κεφάλαια *Market Neutral*, το χαρτοφυλάκιο μπορεί να μην έχει πάντα μηδενικό κίνδυνο. Τα περισσότερα κεφάλαια αντιστάθμισης εμφανίζουν *long bias* (μεροληψία). Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούν να έχουν σημαντική συσχέτιση με τις παραδοσιακές αγορές.

- a. **Global:** Είναι τα κεφάλαια που επιλέγουν μετοχές από τις ευνοημένες αγορές (βιομηχανικοί τομείς και χώρες) σε όλο τον κόσμο. Τα κεφάλαια αυτά κάνουν λιγότερη χρήση παραγώγων από ότι τα κεφάλαια *Global Macro*.
- b. **Regional:** Είναι τα κεφάλαια που διαλέγουν μετοχές από τις τοπικές αγορές ανά τον κόσμο διαφόρων ειδών βιομηχανιών (π.χ. Ασία, Ευρώπη, Η.Π.Α.).
- c. **Sector:** Είναι τα κεφάλαια που επιλέγουν μετοχές από έναν βιομηχανικό τομέα σε αρκετές χώρες του κόσμου (π.χ. Αεροπορική βιομηχανία, Τραπεζικό/ Χρηματοοικονομικό σύστημα, και Τεχνολογία).
- d. **Emerging Markets:** Τα κεφάλαια αυτά επικεντρώνονται σε αναδυόμενες και λιγότερο ώριμες αγορές. Τείνουν να είναι μόνο *long* γιατί σε πολλές

αναδυόμενες αγορές το *short selling* δεν επιτρέπεται και *futures* ή/και *options* δεν είναι διαθέσιμα.

- e. **Dedicated Short Bias:** Όπως λέει και το όνομά τους, οι διαχειριστές αυτών των κεφαλαίων χρησιμοποιούν μόνο *short* θέσεις. Από μία άποψη μπορούν να θεωρηθούν καθρέφτες των παραδοσιακών μόνο *long* κεφαλαίων.

iii. EVENT DRIVEN

Οι στρατηγικές *Event Driven* επικεντρώνονται σε απαιτήσεις χρέους, ιδίων κεφαλαίων ή διαπραγμάτευσης (*trade*) των εταιρειών που βρίσκονται σε ένα συγκεκριμένο στάδιο του κύκλου ζωής τους, όπως *spin-offs*, συγχωνεύσεις, *acquisitions*, χρεοκοπίες, αναδιοργανώσεις, ανακεφαλαιοποιήσεις και *share buybacks*.

- a. **Distressed Securities:** Κεφάλαια που εμπορεύονται τα χρεόγραφα των επιχειρήσεων που βρίσκονται στο στάδιο της αναδιοργάνωσης ή/και χρεοκοπίας, κυμαινόμενα από παλαιότερο χρέος σε κοινές μετοχές.
- b. **Risk Arbitrage:** Κεφάλαια που διαπραγματεύονται χρεόγραφα εταιρειών που εμπλέκονται σε συγχωνεύσεις ή *acquisitions*. Τυπικά, αγοράζουν τις μετοχές της εταιρείας που θα μεταφερθεί σε άλλο κάτοχο ενώ πουλά τις μετοχές της εταιρείας που θα αποκτήσει την παραπάνω.
- c. **Event Driven Multi-strategy:** Κεφάλαια που αφορούν σε διάφορες στρατηγικές, όπως *Risk Arbitrage* ή *Distressed Securities*. Μερικές φορές μπορεί να αφορούν σε επενδύσεις σε *micro* και μικρής κεφαλαιοποίησης δημόσιες επιχειρήσεις που εξοικονομούν χρήματα από τις ιδιωτικές αγορές. Οι διαχειριστές των κεφαλαίων *Event Driven Multi-strategy* συχνά μεταφέρουν χρηματοοικονομικά προϊόντα μεταξύ των στρατηγικών ανάλογα με τις ευκαιρίες της αγοράς.

iv. RELATIVE VALUE ARBITRAGE

Οι στρατηγικές *Relative Value Arbitrage* προσπαθούν να κεφαλαιοποιήσουν τις σχετικές διαφορές στις τιμές των ιδίων κεφαλαίων, του χρέους, των *options* και των *futures*. Το γενικό θέμα των στρατηγικών αυτών είναι ένα «στοίχημα» ότι δύο χρεόγραφα ή τιμές της αγοράς θα συγκλίνουν στο χρόνο. Η ιδέα είναι ότι μία λανθασμένη τιμολόγηση ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος (*instrument*) αναμένεται να συγκλίνει με την θεωρητική ή δίκαιη τιμή του.

- a. **Convertible Arbitrage:** Οι μάνατζερ που ακολουθούν αυτή τη στρατηγική προσπαθούν να εκμεταλλευτούν τις όποιες ανωμαλίες τιμολόγησης ανάμεσα στα μετατρέψιμα ομόλογα και στα υποκείμενα κεφάλαιά τους.
- b. **Fixed Income Arbitrage:** Κεφάλαια που εκμεταλλεύονται ανωμαλίες τιμολόγησης στην αγορά των ομολόγων και των χρεογράφων (*interest rate securities*). Τυπικές στρατηγικές της κατηγορίας αυτής είναι *yield curve arbitrage*, *sovereign debt arbitrage*, *corporate yield spreads*, *municipal yield spreads*, *cash versus futures trading* και *mortgage-backed securities arbitrage*. Οι μάνατζερ αυτής της στρατηγικής συχνά εξουδετερώνουν τον κίνδυνο των επιτοκίων στα χαρτοφυλάκια τους και χρησιμοποιούν μεγάλη ποσότητα μόχλευσης για να ενισχύσουν τις αποδόσεις.
- c. **Equity Market Neutral:** Αυτά τα κεφάλαια συχνά αναφέρονται και ως στρατηγικές *undertaking statistical arbitrage*. Έχουν ως στόχο να εκμεταλλευτούν τις αναποτελεσματικότητες τιμολόγησης ανάμεσα στα *equity securities* ενώ, ταυτόχρονα εξουδετερώνουν την έκθεση στον κίνδυνο της αγοράς (έχοντας μηδενικό συντελεστή βήτα).

v. COMBINED STRATEGIES

Οι διαφορετικές κατηγορίες επενδύσεων που αναφέρθηκαν μέχρι στιγμής, έχουν πολύ διαφορετικές παραμέτρους κινδύνου-απόδοσης. Για αυτό το λόγο, αντί να επιλέξει ένας μάνατζερ μία συγκεκριμένη στρατηγική, συνδυάζει διαφορετικά κεφάλαια αντιστάθμισης σε ένα χαρτοφυλάκιο. Αυτή η διαφοροποίηση θα οδηγήσει σε ένα πιο αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο, με λιγότερο κίνδυνο και ενδεχομένως περισσότερη απόδοση.

- a. **Multi-strategy Funds:** Κεφάλαια που συνδυάζουν διαφορετικές στρατηγικές μέσα στον ίδιο οργανισμό. Τα περισσότερα *Multi-strategy* κεφάλαια εφαρμόζουν κάποιας μορφής δυναμικού επιμερισμού (*allocation*) καθώς αλλάζουν οι συνθήκες στην αγορά.
- b. **Funds of Funds:** Είναι κεφάλαια που επενδύουν σε άλλα κεφάλαια αντιστάθμισης. Κάποια αυτό-περιορίζονται σε συγκεκριμένες κατηγορίες κεφαλαίων αντιστάθμισης κινδύνου, αλλά τα περισσότερα επενδύουν «*across the board*». Η ιδέα που κρύβεται πίσω από αυτά τα κεφάλαια είναι να προσφέρει στους επενδυτές μια «χωρίς-δυσκολία» εναλλακτική για τη δημιουργία ενός καλαθιού με κεφάλαια αντιστάθμισης κινδύνου.

Ο ακόλουθος πίνακας, των Frydenberg, Lindset και Westgaard (2006) συνοψίζει όλες τις κατηγορίες και τις υπο-ομάδες:

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: Κατηγορίες των Κεφαλαίων Αντιστάθμισης

Tactical Trading

- i. Global Macro
- ii. Managed Futures / CTA

Equity Long/Short

- i. Global
- ii. Regional
- iii. Sectoral
- iv. Emerging Markets
- v. Dedicated Short Bias

Event Driven

- i. Distress Securities
- ii. Risk Arbitrage
- iii. Event-Driven Multi-Strategy

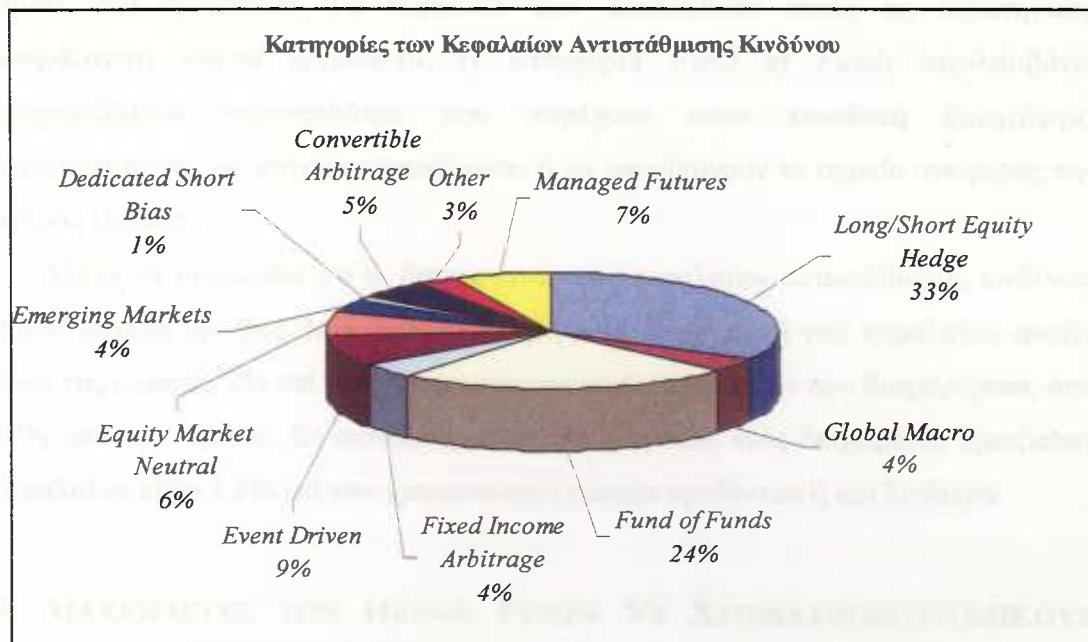
Relative Value Arbitrage

- i. Convertible Arbitrage
- ii. Fixed Income Arbitrage
- iii. Equity Market Neutral

Combined Strategies

- i. Multi-Strategy Funds
- ii. Funds of Funds

Χρησιμοποιώντας το ακόλουθο γράφημα οι Malkier και Saha (2004) παρουσιάζουν την κατανομή των κατηγοριών των κεφαλαίων αντιστάθμισης κινδύνου σύμφωνα με τη βάση δεδομένων TASS.



(Malkier και Saha, 2004)

Σύμφωνα με τους *Malkier και Saha (2004)* η μεγαλύτερη κατηγορία των κεφαλαίων αντιστάθμισης κινδύνου ονομάζεται *Long/Short*. Αυτά τα κεφάλαια διαθέτουν σημαντικές *short* θέσεις ή χρησιμοποιούν παράγωγα για να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο της αγοράς για τις *long* θέσεις τους. Κάποια κεφάλαια της κατηγορίας αυτής άμεσα προσπαθούν να γίνουν «*Equity Market Neutral*», δηλαδή, να έχουν θετικές αποδόσεις ανεξάρτητα από τις κινήσεις της αγοράς. Οι στρατηγικές *arbitrage* έχουν ως στόχο να εκμεταλλευτούν τις λανθασμένες τιμολογήσεις των χρεογράφων (όπως μη κατάλληλη σχετική αξιολόγηση των μετατρέψιμων ομολόγων και των υποκείμενων σε αυτά μετοχών και ομολόγων) ή τις ασυνήθιστες διακυμάνσεις των επιτοκίων ποικίλων χρεογράφων σταθερού εισοδήματος. Για αυτές τις κατηγορίες των κεφαλαίων γίνεται μεγάλη χρήση στατιστικών και μαθηματικών υποδειγμάτων με στόχο να καλυφθούν οι αναποτελεσματικότητες της αγοράς. Τα κεφάλαια *Event Driven* χρησιμοποιούνται για την απόκτηση κερδών λόγω εταιρικών αναδομήσεων ή συγχωνεύσεων. Κατευθυνόμενες στρατηγικές χρησιμοποιούνται από τις κατηγορίες κεφαλαίων *Global Macro*, *Emerging Markets*, *Dedicated Short Bias* και *Managed Futures*. Αυτές οι στρατηγικές έχουν ως στόχο απόκτηση κέρδους από τη βραχυπρόθεσμη ταχύτητα (ορμή) κίνησης του συναλλάγματος, των ιδίων κεφαλαίων, των ομολόγων ή των

τιμών των προϊόντων. Τα κεφάλαια που ακολουθούν αυτές τις στρατηγικές ονομάζονται «*trend followers*». Η κατηγορία *Fund of Funds* περιλαμβάνει διαχειριζόμενα χαρτοφυλάκια που παρέχουν στον επενδυτή δυνατότητα διαφοροποίησης με στόχο να ταυτίζονται ή να υπερβαίνουν το σημείο αναφοράς της αγοράς (*industry*).

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι διαχειριστές των κεφαλαίων αντιστάθμισης κινδύνου έχουν υψηλές αμοιβές. Μία τυπική αμοιβή ενός διαχειριστή των κεφαλαίων αυτών είναι της μορφής, 2% επί των χρηματοοικονομικών προϊόντων που διαχειρίζεται, συν 20% επί των κερδών. Σε αντίθεση, μια τυπική αμοιβή ενός διαχειριστή αμοιβαίων κεφαλαίων είναι 1.5% επί των χρηματοοικονομικών προϊόντων ή και λιγότερο.

3. ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΤΕΣ ΤΩΝ HEDGE FUNDS Vs ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥΣ ΕΠΕΝΔΥΤΕΣ

Η διαδικασία επένδυσης διαφέρει σημαντικά ανάμεσα στους διαχειριστές-μάνατζερ των hedge-fund και τους χρηματοοικονομικούς επενδυτές. Συγκεκριμένα οι στόχοι και οι βλέψεις ενός μάνατζερ των hedge-fund συνοψίζονται στους εξής:

- Ο μάνατζερ είναι ο καλύτερος κριτής του κινδύνου και για αυτό το λόγο πρέπει να έχει πλήρη ελευθερία ως προς τις επενδυτικές αποφάσεις.
- Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται για τις ανταλλαγές (trading strategies) έχουν μεγάλο βαθμό ιδιοκτησίας και για αυτό το λόγο πρέπει να φυλάσσονται με προσοχή ώστε να μην υπάρχει πιθανότητα- δυνατότητα να αντιγραφούν ή να αποτελέσουν αντικείμενο μίμησης.
- Η απόδοση είναι ο απόλυτος και στις περισσότερες περιπτώσεις ο μοναδικός αντικειμενικός σκοπός- στόχος.
- Η διαχείριση του κινδύνου δεν είναι το κεντρικό σημείο της επιτυχίας ενός hedge-fund.
- Οι ρυθμιστικοί περιορισμοί και τα θέματα συμμόρφωσης είναι ένα εμπόδιο στην λειτουργία των hedge-funds.
- Η πνευματική κυριότητα εμπλέκεται σε μικρό βαθμό στα hedge-funds.

Αντίστοιχα, οι στόχοι του χρηματοοικονομικού επενδυτή είναι οι εξής:

- Όντας πιστωτικά ιδρύματα, χρηματοοικονομικοί οργανισμοί ζητούν να καταλάβουν τη διαδικασία της επένδυσης πριν την πραγματοποιήσουν

- Οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί θέλουν να γνωρίζουν το βαθμό έκθεσης στον κίνδυνο κάθε μάνατζερ, και σε αρκετές περιπτώσεις, θέτουν τα όρια των στρατηγικών του μάνατζερ ούτως ώστε οι στρατηγικές να είναι συνεπείς με τους στόχους του οργανισμού.
- Η πορεία της επένδυσης δε μετράται μόνο με την απόδοση. Λαμβάνονται υπόψη και άλλοι παράγοντες, όπως, ο κίνδυνος.
- Η διαχείριση του κινδύνου και η διαφάνειά του είναι ιδιαίτερης σημασίας.
- Οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί λειτουργούν σε ένα περιβάλλον γεμάτο ρυθμίσεις και κανονισμούς. Οφείλουν να συμμορφώνονται με ένα συγκεκριμένο κανονιστικό και ρυθμιστικό πλαίσιο.
- Οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί επιθυμούν δομή, σταθερότητα και συνέπεια σε μία πολύ καλά προσδιορισμένη διαδικασία επένδυσης, η οποία είναι ενταγμένη στα πλαίσια ενός οργανισμού και δεν εξαρτάται από ένα μεμονωμένο άτομο.

Παρόλο που τα παραπάνω αποτελούν μια ομάδα μόνο από τις αρμοδιότητες και τους στόχους των μάνατζερ των hedge-fund και των χρηματοοικονομικών επενδυτών αναδεικνύουν τη διαφοροποίηση που υπάρχει μεταξύ τους. Μπορούν και οι δύο πλευρές να κερδίσουν αρκετά από την κατανόηση των αρμοδιοτήτων του καθενός.

4. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΙΚΙΛΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Πληροφορίες- δεδομένα των κεφαλαίων αντιστάθμισης για τον κίνδυνό τους και για τη γενική τους πορεία δεν είναι διαθέσιμα όπως για τα αμοιβαία κεφάλαια. Χρησιμοποιώντας δεδομένα για το διάστημα Ιανουάριος 1994 μέχρι και Ιούνιος 2005, οι *Frydenberg, Lindset και Westgaard (2006)*, διαπίστωσαν ότι οι στατιστικές ιδιότητες ποικίλων δεικτών των κεφαλαίων αντιστάθμισης κινδύνου είναι αρκετά διαφορετικές από τους δείκτες των ιδίων κεφαλαίων και των ομολόγων. Από την ανάλυση τους καταλήγουν στα εξής:

- i. Πολλοί δείκτες των κεφαλαίων αντιστάθμισης έχουν αποδόσεις των οποίων η κατανομή απέχει πολύ από την κανονική και χαρακτηρίζονται από θετική ασυμμετρία και υψηλή κύρτωση.
- ii. Η συσχέτιση ανάμεσα στις μηνιαίες αποδόσεις της αγοράς ομολόγων με τις κατηγορίες των κεφαλαίων αντιστάθμισης είναι γενικά πολλή χαμηλή.

Παρόλα αυτά, πολλές κατηγορίες των κεφαλαίων αντιστάθμισης δείχνουν υψηλή συσχέτιση με την αγορά των ιδίων κεφαλαίων. Αυτό ισχύει ακόμα και για τις κατηγορίες των κεφαλαίων αντιστάθμισης που υποτίθεται ότι είναι ασυσχέτιστες με τις κινήσεις της αγοράς των ιδίων κεφαλαίων.

iii. Πολλές από τις αποδόσεις των κεφαλαίων αντιστάθμισης δείχνουν υψηλό βαθμό σειριακής συσχέτισης, κάτι που πιθανόν να οδηγήσει σε σημαντική υπο-εκτίμηση της πραγματικής διακύμανσης και συσχέτισης. Αυτό με τη σειρά του οδηγεί σε υπερ-εκτίμηση του κινδύνου (*risk adjusted performance*) που βασίζεται στο μέσο και την τυπική απόκλιση.

5. ΜΕΡΟΛΗΨΙΕΣ ΣΤΙΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΤΩΝ HEDGE FUNDS

i. SURVIVORSHIP BIAS

Κάθε ποσοτικοποιημένη προσέγγιση της διαχείρισης του κινδύνου χρησιμοποιεί ως ένα βαθμό ιστορικά δεδομένα. Η διαχείριση του κινδύνου των κεφαλαίων αντιστάθμισης του κινδύνου δεν αποτελεί εξαίρεση. Υπάρχει όμως ένα χαρακτηριστικό των κεφαλαίων αντιστάθμισης κινδύνου που δημιουργεί ένα πρόβλημα όσον αφορά στη χρήση των ιστορικών δεδομένων. Σε μερικές περιπτώσεις βάσεις δεδομένων περιλαμβάνουν «νεκρά» κεφάλαια αντιστάθμισης κινδύνου-δηλαδή κεφάλαια αντιστάθμισης κινδύνου που δε χρησιμοποιούνται κατά την περίοδο που γίνεται η μελέτη για τη διαχείριση του κινδύνου, καθώς επίσης και ενεργά κεφάλαια. Μελέτες έχουν αποδείξει ότι στις παραπάνω περιπτώσεις η επίδραση της «μεροληψίας επιβίωσης»- survivorship bias είναι ουσιώδης. Για να δείξει το πόσο σημαντική είναι αυτή η επίδραση ο Lo (2001) θεωρεί ένα σύνολο n κεφαλαίων με αποδόσεις R_1, \dots, R_n και ορίζει την επιπλέον απόδοση για κάθε μονάδα κινδύνου ως:

$$X_j = \frac{R_j - R_f}{\sigma_j} \quad (I.1)$$

όπου R_f είναι ο ρυθμός απόδοσης του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο και σ_j είναι η τυπική απόκλιση του R_j . Τα X_j είναι οι στατιστικές ελέγχου όπου οι επενδυτές χρησιμοποιούν για να αξιολογήσουν τα κεφάλαια. Η αναμενόμενη τιμή

$E[X_j]$ της στατιστικής αυτής είναι ο γνωστός λόγος του *Sharpe*. Για ευκολία θεωρούμε ότι οι στατιστικές αυτές κατανέμονται ανεξάρτητα και ισόνομα με συνάρτηση κατανομής $F(X)$.

Υποθέτουμε ότι κανένα από αυτά τα κεφάλαια δεν επιδεικνύει καλύτερη επίδοση ή *alpha*, έτσι ώστε $E[X_j] = 0$ για όλα τα j , και θεωρούμε ως το «καλύτερο» κεφάλαιο εκείνο με την καλύτερη επίδοση της στατιστικής X :

$$X^* = \text{Max}[X_1, X_2, \dots, X_n]. \quad (\text{I.2})$$

Τώρα ξεκάθαρα μπορούμε να δούμε ότι αυτό το κεφάλαιο που θεωρήσαμε με το παραπάνω κριτήριο ότι έχει την καλύτερη επίδοση δεν είναι στην πραγματικότητα καλύτερο από τα υπόλοιπα κεφάλαια. Αυτό ισχύει γιατί υποθέσαμε ότι κανένα κεφάλαιο δεν έχει *alpha*. Αν προσπαθήσουμε να βγάλουμε συμπεράσματα από τη στατιστική X^* χωρίς να λάβουμε υπόψη μας ότι το κεφάλαιο αυτό το έχουμε επιλέξει από έναν πληθυσμό κεφαλαίων με μοναδικό κριτήριο την επίδοση του, θα συμπεράνουμε λανθασμένα ότι ο μάνατζερ είναι πολύ ικανός.

Για να δείξει πόσο σημαντική είναι η επίδραση μιας τέτοιας μεροληψίας, ο *Lo (2001)*, παρουσιάζει έναν πίνακα (2) ο οποίος περιλαμβάνει το μέσο, την τυπική απόκλιση, και τα 2,5% και 97,5% ποσοστιαία σημεία των X^* για διάφορες τιμές του n , υποθέτοντας ότι τα X_j τυχαίες μεταβλητές που κατανέμονται σύμφωνα με την τυπική κανονική κατανομή. Ακόμα και σε ένα δείγμα με μόνο πέντε κεφάλαια, ο λόγος του *Sharpe* $E[X^*]$ για το κεφάλαιο με την καλύτερη επίδοση είναι 1,16, παρόλο που οι πραγματικοί λόγοι του *Sharpe* για όλα τα κεφάλαια είναι μηδέν. Αυτή η μεροληψία γίνεται όλο και περισσότερο έντονη καθώς ο αριθμός των κεφαλαίων αυξάνεται, καταλήγοντας σε έναν λόγο του *Sharpe* 2,04 για το καλύτερο από τα 30 κεφάλαια. Επιπλέον η διακύμανση της στατιστικής X^* , όπως αυτή υπολογίζεται από την τυπική απόκλιση, μειώνεται καθώς ο αριθμός των κεφαλαίων αυξάνεται, δίνοντας τη λανθασμένη εντύπωση ότι καθώς ο αριθμός των κεφαλαίων αυξάνεται η επίδοση τους γίνεται όλο και πιο σταθερή.

Πίνακας 2 : Ροπές και ακραία ποσοστιαία σημεία της στατιστικής του κεφαλαίου με την «καλύτερη» επίδοση $X^* = \text{Max}[X_1, X_2, \dots, X_n]$, όπου $\{X_i\}$ είναι τυχαίες μεταβλητές που κατανέμονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα σύμφωνα με την τυπική κανονική κατανομή (Lo, 2001).

n	$E[X^*]$	$SD[X^*]$	$C_{0.025}$	$C_{0.975}$
1	0.00000	1.00000	-1.960	1.960
5	1.16296	0.66898	-0.055	2.572
10	1.53875	0.58681	0.506	2.803
15	1.73591	0.54867	0.779	2.932
20	1.86748	0.52507	0.960	3.020
25	1.96531	0.50844	1.093	3.087
30	2.04276	0.49582	1.197	3.140

ii. ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ (NONLINEARITY)

Ένας από τους λόγους επένδυσης σε κεφάλαια αντιστάθμισης κινδύνου είναι το γεγονός ότι οι αποδόσεις τους δείχνουν ασυχέτιστες με τους δείκτες της αγοράς, όπως για παράδειγμα ο *S&P 500*, και επιπλέον υπάρχουν πολλά πλεονεκτήματα από τη διαφοροποίηση ενός χαρτοφυλακίου. Ο Lo (2001) παρουσιάζει έναν πίνακα (3) που αναφέρεται στη μήτρα συσχέτισης των αποδόσεων των δεικτών των κεφαλαίων αντιστάθμισης κινδύνου, όπου ο κάθε δείκτης αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο είδος-στυλ κεφαλαίου αντιστάθμισης κινδύνου όπως, νομισματική κυκλοφορία, αναδυόμενες αγορές, σχετικές τιμές, κτλ. η τελευταία σειρά αναφέρεται στη συσχέτιση όλων των δεικτών των κεφαλαίων αντιστάθμισης του κινδύνου με τις αποδόσεις του δείκτη *S&P 500*. Είναι φανερό ότι πολλά είδη κεφαλαίων αντιστάθμισης του κινδύνου έχουν χαμηλή ή ακόμα και αρνητική συσχέτιση με την αγορά.

Παρόλα αυτά ο ισχυρισμός για διαφοροποίηση πρέπει να μετριαστεί από το μάθημα που έδωσε το καλοκαίρι του 1998 όταν μια αμέλεια στη Ρωσική κυβέρνηση πυροδότησε μια παγκόσμια τάση προς την ποιότητα, η οποία άλλαξε τους συντελεστές συσχέτισης μέσα σε μια νύχτα από 0 σε 1. Στις φυσικές επιστήμες τέτοιου είδους φαινόμενα είναι παραδείγματα της συμπεριφοράς «*phase-locking*», καταστάσεις στις οποίες άλλοτε ασυχέτιστες ενέργειες ξαφνικά συγχρονίζονται. Το

γεγονός ότι οι συνθήκες της αγοράς μπορούν να δημιουργήσουν συμπεριφορές «phase-locking» δεν είναι άγνωστο- συγκρούσεις των αγορών έχουν παραπηρηθεί από την απαρχή των οργανωμένων χρηματοοικονομικών αγορών. Πριν από το 1998, λίγοι επενδυτές κεφαλαίων αντιστάθμισης του κινδύνου και μάνατζερ ενσωμάτωναν αυτή την πιθανότητα στις διαδικασίες επένδυσής τους με οποιονδήποτε συστηματικό τρόπο.

Από τη χρηματοοικονομική- μηχανική πλευρά, ο περισσότερο αξιόπιστος τρόπος για να συλλάβουμε τις επιδράσεις του φαινομένου «phase-locking» είναι να εκτιμήσουμε ένα υπόδειγμα κινδύνου των αποδόσεων στο οποίο τέτοια γεγονότα επιτρέπονται. Ο *Lo (2001)*, δίνει ένα παράδειγμα, στο οποίο υποθέτει ότι οι αποδόσεις προέρχονται από το ακόλουθο υπόδειγμα δύο παραγόντων:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i \Lambda_t + I_t Z_t + \varepsilon_{it} \quad (\text{I.3})$$

όπου

- R_{it} = η απόδοση του κεφαλαίου i στο χρόνο t ,
- α_i = η σταθερά του κεφαλαίου,
- Λ_t = το συστατικό μέρος της «αγοράς»,
- β_i = η εναισθησία του κεφαλαίου στην αγορά,
- $I_t Z_t$ = συστατικό μέρος «phase-locking» ή καταστροφικό γεγονός στην αγορά,
- ε_{it} = μη-συστηματικός κίνδυνος του κεφαλαίου i στο χρόνο t .

Επιπλέον υποθέτει ότι Λ_t , I_t , Z_t και ε_{it} είναι αμοιβαία ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα έχοντας τις ακόλουθες ροπές:

$$\begin{aligned} E[\Lambda_t] &= \mu_\lambda, & Var[\Lambda_t] &= \sigma_\lambda^2 \\ E[Z_t] &= 0, & Var[Z_t] &= \sigma_z^2 \\ E[\varepsilon_{it}] &= 0, & Var[\varepsilon_{it}] &= \sigma_{\varepsilon_i}^2 \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

και ορίζει τον δείκτη «*phase-locking*» ως :

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } p \\ 0 & \text{με πιθανότητα } p_0 = 1 - p \end{cases} \quad (I.5)$$

Σύμφωνα με την (I.3), οι αναμενόμενες αποδόσεις είναι το άθροισμα τριών συστατικών στοιχείων: το *alpha* των κεφαλαίων, α_i , το συστατικό μέρος της «αγοράς», Λ_t , για το οποίο κάθε κεφάλαιο έχει τη δική του ευαισθησία, β_i , και ένα στοιχείο «*phase-locking*» το οποίο είναι ίδιο για όλα τα κεφάλαια και για κάθε χρονική στιγμή, παίρνοντας μόνο μία εκ των δύο πιθανών τιμών, είτε 0 (με πιθανότητα p_0) είτε Z_t (με πιθανότητα p). Εάν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα p είναι μικρή, έστω 0,001, τότε στις περισσότερες των περιπτώσεων οι αναμενόμενες τιμές των αποδόσεων των κεφαλαίων i καθορίζονται από τη σχέση $\alpha_i + \beta_i \Lambda_t$, και σε μεγάλα χρονικά διαστήματα παρατηρούμε στη σχέση και τον παράγοντα Z_t . Εάν η διακύμανση σ_z του Z_t είναι πολύ μεγαλύτερη από τις διακυμάνσεις των παραγόντων Λ_t και ε_u , τότε ο κοινός παράγοντας Z_t θα κυριαρχεί τις αναμενόμενες αποδόσεις όλων των μετοχών όταν $I_t = 1$.

Ο *Lo (2001)* συνεχίζει την ανάλυση του ορίζοντας το δεσμευμένο συντελεστή συσχέτισης δύο κεφαλαίων i και j ως το λόγο της δεσμευμένης συνδιακύμανσης προς το προϊόν της τετραγωνικής ρίζας των δεσμευμένων διακυμάνσεων, υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει $I_t = 0$ (καμία καταστροφή):

$$\text{Corr}[R_{it}, R_{jt} | I_t = 0] = \frac{\beta_i \beta_j \sigma_\lambda^2}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_\lambda^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2} \sqrt{\beta_j^2 \sigma_\lambda^2 + \sigma_{\varepsilon_j}^2}} \approx 0 \quad \text{για } \beta_i \approx \beta_j \approx 0. \quad (I.6)$$

Ο *Lo (2001)* υποθέτει ότι $\beta_i \approx \beta_j \approx 0$ για να «πιάσει» το χαρακτηριστικό της ουδετερότητας της αγοράς, χαρακτηριστικό που επιθυμούν πολλοί επενδυτές των κεφαλαίων αντιστάθμισης του κινδύνου. Υπό την υπόθεση ότι $I_t = 1$ (ύπαρξη καταστροφής) ο δεσμευμένος συντελεστής συσχέτισης γίνεται:



$$\text{Corr}[R_{it}, R_{jt} | I_t = 1] = \frac{\beta_i \beta_j \sigma_\lambda^2 + \sigma_z^2}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_\lambda^2 + \sigma_z^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2} \sqrt{\beta_j^2 \sigma_\lambda^2 + \sigma_z^2 + \sigma_{\varepsilon_j}^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 / \sigma_z^2} \sqrt{1 + \sigma_{\varepsilon_j}^2 / \sigma_z^2}}$$

για $\beta_i \approx \beta_j \approx 0$. (I.7)

Εάν η σ_z^2 είναι μεγαλύτερη σχετικά με τις $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ και $\sigma_{\varepsilon_j}^2$ τότε εάν η μεταβλητότητα του συστατικού στοιχείου της καταστροφής κυριαρχεί επί της μεταβλητότητας των καταλούπων και των δύο κεφαλαίων, η σχέση (I.7) θα είναι ίση με τη μονάδα. Όταν πραγματοποιείται το φαινόμενο «*phase-locking*», η συσχέτιση ανάμεσα στα δύο κεφάλαια i και j μπορεί αυθαίρετα να τείνει προς τη μονάδα.

Ένα «ύπουλο» χαρακτηριστικό της σχέσης (I.3) είναι ότι συνεπάγεται μια πολύ μικρή τιμή για την μη-δεσμευμένη συσχέτιση. Για να εξηγήσει το λόγο ο *Lo (2001)*, υπενθυμίζει ότι ο συντελεστής της μη-δεσμευμένης συσχέτισης είναι ο λόγος της μη-δεσμευμένης διακύμανσης προς το προϊόν της τετραγωνικής ρίζας των μη-δεσμευμένων διακυμάνσεων:

$$\text{Corr}[R_{it}, R_{jt}] = \frac{\text{Cov}[R_{it}, R_{jt}]}{\sqrt{\text{Var}[R_{it}] \text{Var}[R_{jt}]}} , \quad (\text{I.8})$$

$$\text{Cov}[R_{it}, R_{jt}] = \beta_i \beta_j \sigma_\lambda^2 + \text{Var}[I_t Z_t] = \beta_i \beta_j \sigma_\lambda^2 + p \sigma_z^2 , \quad (\text{I.9})$$

$$\text{Var}[R_{it}] = \beta_i^2 \sigma_\lambda^2 + \text{Var}[I_t Z_t] + \sigma_{\varepsilon_i}^2 = \beta_i^2 \sigma_\lambda^2 + p \sigma_z^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad (\text{I.10})$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ο μη-δεσμευμένος συντελεστής συσχέτισης βασισμένος στη σχέση (I.8):

$$\text{Corr}[R_{it}, R_{jt}] = \frac{\beta_i \beta_j \sigma_\lambda^2 + p \sigma_z^2}{\sqrt{\beta_i^2 \sigma_\lambda^2 + p \sigma_z^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2} \sqrt{\beta_j^2 \sigma_\lambda^2 + p \sigma_z^2 + \beta_j^2 \sigma_{\varepsilon_j}^2}} \quad (\text{I.11})$$

$$\approx \frac{p}{\sqrt{p + \sigma_{\varepsilon_i}^2 / \sigma_z^2} \sqrt{p + \sigma_{\varepsilon_j}^2 / \sigma_z^2}} \quad \text{για } \beta_i \approx \beta_j \approx 0 . \quad (\text{I.12})$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3: Μήτρα συσχέτισης των αποδόσεων των δεικτών των κεφαλαίων αντιστάθμισης κινδύνου : Μηναία δεδομένα, Ιανουάριος 1996-Νοέμβριος 1999 (σε ποσοστά)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1. Currencies	100,0																				
2. ED-distress	4,7	100,0																			
3. ED-merger arb	-11,1	54,4	100,0																		
4. EM-equity	-21,0	42,8	47,2	100,0																	
5. EM	-11,1	45,6	50,2	86,3	100,0																
6. EM-fixed income	-5,8	28,7	34,2	43,8	76,3	100,0															
7. ED	-5,7	85,8	80,8	54,6	58,8	40,1	100,0														
8. Fund of Funds	7,9	59,2	52,4	44,3	56,8	49,8	70,8	100,0													
9. Futures trading	45,3	3,0	-7,7	-6,1	5,5	15,3	0,5	30,1	100,0												
10. Growth	-3,7	49,1	47,6	34,2	42,7	29,2	60,5	63,2	6,9	100,0											
11. High yield	8,0	54,2	16,7	25,2	33,5	35,4	48,2	35,8	7,2	12,9	100,0										
12. Macro	28,5	10,9	8,7	5,5	16,9	30,1	17,1	44,1	51,5	14,5	17,1	100,0									
13. Opportunistic	9,7	49,3	40,5	29,0	43,8	43,4	60,3	74,7	19,4	68,0	24,4	45,0	100,0								
14. Other	8,7	53,9	51,6	37,6	52,7	48,0	64,3	68,5	27,3	76,9	20,3	29,6	73,6	100,0							
15. RV	12,0	48,9	36,9	37,5	39,4	26,0	53,9	46,1	13,5	19,1	51,0	18,5	34,2	31,6	100,0						
16. RV-convertible	8,1	52,2	36,3	28,6	41,6	37,3	54,4	45,4	6,9	25,9	49,6	22,7	47,1	33,6	56,9	100,0					
17. RV-EQLS	6,5	30,5	43,5	33,5	26,2	12,6	42,5	34,0	4,2	34,3	17,1	9,0	26,3	41,4	50,8	13,0	100,0				
18. RV-option arb	-0,3	7,1	1,5	14,6	10,6	3,4	8,9	3,0	-2,1	-20,3	12,2	6,5	4,7	-14,0	47,3	2,0	-4,0	100,0			
19. RV-other stat arb	10,2	19,9	-0,2	17,2	12,4	-2,4	13,6	19,4	0,6	22,4	8,1	-12,8	10,2	14,4	30,2	8,1	7,0	5,3	100,0		
20. Short selling	15,1	-48,1	-53,8	-35,2	-43,4	-30,1	-61,8	-49,9	8,6	-85,7	-12,3	-4,3	-59,1	-67,9	-9,6	-28,6	-29,5	21,6	-11,0	100,0	
21. Value	-10,6	65,7	59,3	47,9	62,0	43,5	78,4	69,4	8,7	74,3	26,0	15,2	67,0	77,7	36,6	45,5	34,3	-4,3	20,3	-73,8	100,0
22. S&P 500	11,1	40,7	46,6	28,6	43,1	35,4	51,0	54,6	19,3	78,0	18,1	20,5	60,4	71,3	23,4	28,3	41,5	-16,3	7,6	-70,1	63,9

Σημείωση: ED = even driven, arb = arbitrage, EM = emerging market, RV = relative value, EQLS = equity long/short, stat = statistical -

Andrew Lo (2001)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΑΞΙΑ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ - VALUE AT RISK

1. ΟΡΙΣΜΟΣ

Η μεγάλη αύξηση του αριθμού των εμπορεύσιμων χρηματοοικονομικών προϊόντων ενός χαρτοφυλακίου καθιστά τη μέτρηση του κινδύνου της αγοράς (*market risk*) εξέχουσας σημασίας για τους ρυθμιστές και για τον εσωτερικό έλεγχο του κινδύνου. Ο όρος «κίνδυνος της αγοράς» αφορά στον κίνδυνο ένα χρηματοοικονομικό ίδρυμα να εμφανίσει ζημιές στο βιβλίο συναλλαγών εξαιτίας δυσμενών συνθηκών στην αγορά. Συγκεκριμένα οι τράπεζες οφείλουν σήμερα να διακρατούν μια ποσότητα κεφαλαίου ως προστασία ενάντια στις δυσμενείς συνθήκες-κινήσεις της αγοράς. Αυτή η ποσότητα ονομάζεται αξία σε κίνδυνο (*value at risk-VaR*) και από τη μαθηματική πλευρά είναι ένα ποσοστιαίο σημείο της κατανομής κερδών-απωλειών (*P&L distribution*) ενός συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου για μια προκαθορισμένη χρονική περίοδο.

Υπάρχουν διάφορες κατηγορίες χρηματοοικονομικών κινδύνων. Μερικές από αυτές είναι, ο κίνδυνος της αγοράς, ο κίνδυνος ρευστότητας, ο λειτουργικός κίνδυνος, ο κίνδυνος μοντελοποίησης και ο πιστωτικός κίνδυνος. Η ορθή διαχείριση των παραπάνω κινδύνων, με στόχο την ελαχιστοποίηση των ενδεχόμενων απωλειών, είναι εξέχουσας σημασίας για τη διασφάλιση της βιωσιμότητας, της κερδοφορίας και της διαμόρφωσης και διατήρησης μιας «καλής» φήμης ενός χρηματοοικονομικού οργανισμού.

Η αξία σε κίνδυνο (*value at risk-VaR*) είναι το πιο γνωστό μέτρο κινδύνου. Όπως ήδη αναφέραμε η *VaR* είναι η μέγιστη ζημιά που μπορεί να υποστεί μια θέση ή ένα χαρτοφυλάκιο που αποτιμάται για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης και για καθορισμένη χρονική περίοδο. Είναι η εκτίμηση της ουράς μιας εμπειρικής κατανομής. Με απλά λόγια είναι ο αριθμός που προσδιορίζει το ποσό που ένας χρηματοοικονομικός οργανισμός μπορεί να χάσει με κάποια συγκεκριμένη πιθανότητα και για ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα. Το γεγονός ότι σαν έννοια είναι ιδιαίτερα κατανοητή, έδωσε τη δυνατότητα στη *VaR* να αποκτήσει υψηλή φήμη και να γίνει ευρέως γνωστή ως αξιόπιστο μέτρο υπολογισμού του κινδύνου. Η *VaR* εξειδικεύει τον κίνδυνο της αγοράς, που σχετίζεται με κάθε χαρτοφυλάκιο, σε ένα συγκεκριμένο αριθμό.

Σύμφωνα με τους *Manganelli και Engle (2001)*, η ακρίβεια των εκτιμήσεων είναι καίριας σημασίας. Μια λανθασμένη εκτίμηση του κινδύνου μπορεί να οδηγήσει σε δυσμενή κεφαλαιακή διάρθρωση ή ακόμα και σε προβλήματα χρηματοοικονομικής σταθερότητας ενός οργανισμού.

Πολλές εφαρμογές θεωρούν ως δεδομένο ότι οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων κατανέμονται κανονικά, παρόλο που είναι αποδεδειγμένο ότι παρουσιάζουν ασυμμετρία (*skewness*) και υπερβάλλουσα κύρτωση (*excess kurtosis*), καταλήγοντας σε υποτίμηση ή υπερτίμηση της πραγματικής *VaR*.

Σύμφωνα με τους *Kuester, Mittnik και Paolella (2006)* στην πράξη, η εκτίμηση της *VaR* εμποδίζεται από το γεγονός ότι οι αποδόσεις των χρηματοοικονομικών στοιχείων παρουσιάζουν «μη-τυπικές» στατιστικές ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα, δεν κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα (*iid*) και επιπλέον δεν κατανέμονται κανονικά. Αυτό αντανακλάται μέσα από τρία ευρέως γνωστά χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών αποδόσεων τα οποία είναι τα εξής:

- i. στην κατανομή των αποδόσεων παρατηρούνται περίοδοι με υψηλή διακύμανση να ακολουθούνται από περιόδους με χαμηλή διακύμανση και το αντίστροφο (*volatility clustering*). Σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται υψηλή αυτοσυσχέτιση των αποδόσεων και των τετραγώνων τους,
- ii. παρατηρείται σημαντική κύρτωση (*kurtosis*) στην κατανομή των αποδόσεων. Η πυκνότητα της μη-δεσμευμένης κατανομής των αποδόσεων είναι περισσότερο συγκεντρωμένη γύρω από το κέντρο και έχει πιο παχιές ουρές από ότι η κανονική κατανομή,
- iii. τέλος παρατηρείται μία ήπιας μορφής ασυμμετρία (*skewness*) των αποδόσεων, πιθανόν λόγω του γεγονότος ότι είναι μεταβλητά στο χρόνο.

Σαν συνέπεια, οι «τυπικές» μέθοδοι, που βασίζονται στην υπόθεση κανονικότητας, ομοιομορφίας και ανεξαρτησίας της κατανομής των αποδόσεων, τείνουν να μην επαρκούν. Αυτό έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη νέων εναλλακτικών στρατηγικών για την πρόβλεψη της *VaR*.

2. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

2.1. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Τα υποδείγματα *VaR* που βασίζονται σε τυποποιημένες στατιστικές κατανομές (*standard statistical distributions*) καθορίζουν τη δεσμευμένη κατανομή των

αποδόσεων και εκτιμούν την τυπική απόκλιση (ή τη μήτρα συνδιακυμάνσεων) των αποδόσεων ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος. Ο παραπάνω λόγος καθιστά τις εκτιμήσεις της διακύμανσης αναπόσπαστο κομμάτι για μία «καλή» εκτίμηση υποδειγμάτων *VaR*. Έχοντας εκτιμήσει την κατανομή των αποδόσεων και πάροντας το αντίστοιχο επιθυμητό ποσοστιαίο σημείο της κατανομής των αποδόσεων (95% ή 99% στις περισσότερες των περιπτώσεων) έχουμε προσδιορίσει τη *VaR*.

2.1.1.ΜΕΘΟΔΟΣ ΙΣΟΛΥΝΑΜΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ-ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ & ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΟΥ ΚΙΝΗΤΟΥ ΜΕΣΟΥ

Τα δύο υποδείγματα που παρουσιάζουν οι *Bredin και Hyde (2002)* είναι παραμετρικές προσεγγίσεις. Αυτές είναι οι προσεγγίσεις διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων που υποθέτουν κανονικότητα και σειριακή ανεξαρτησία. Η μέθοδος ισοδύναμα σταθμισμένης διακύμανσης-συνδιακύμανσης (*equally weighted variance-covariance method*) θεωρεί εξίσου σημαντική κάθε παρατήρηση, ενώ η μέθοδος του εκθετικά σταθμισμένου κινητού μέσου (*exponentially weighted moving average method*) δίνει έμφαση στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Και για τις δύο προσεγγίσεις οι *Bredin και Hyde (2002)* ορίζουν ως R_t τη μήτρα των αποδόσεων και Σ_t τη μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των R_t . Επιπλέον, ορίζουν ως δ , ένα διάνυσμα ευαισθησίας, που μετρά την ευαισθησία του χαρτοφυλακίου στις αλλαγές των παραγόντων του κινδύνου. Η αλλαγή στην αξία του χαρτοφυλακίου ορίζεται ως:

$$\Delta P \sim N(0, \delta' \Sigma \delta), \quad (\text{II.1})$$

και η *VaR* δίνεται από τη σχέση:

$$VaR = -Z(\alpha) \sqrt{\delta' \Sigma \delta}, \quad (\text{II.2})$$

όπου $Z(\alpha)$ είναι ο α -ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Ακολουθώντας τη μέθοδο ισοδύναμα σταθμισμένης διακύμανσης-συνδιακύμανσης, οι *Bredin και Hyde (2002)*, εκτιμούν τη μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\hat{\Sigma}_{t+1} = \frac{1}{T} \sum_{s=0}^{T-1} R_{t-s} R'_{t-s} \quad (\text{II.3})$$

Εάν η μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων μεταβάλλεται στο χρόνο, οι σχετικά παλιές παρατηρήσεις δεν πρέπει να ληφθούν υπόψη. Ή α δοθεί έμφαση στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Η μέθοδος του εκθετικά σταθμισμένου κινητού μέσου ορίζει τον παράγοντα λ , ως τον παράγοντα στάθμισης, γνωστός και ως «*decay factor*». Αυτός ο παράγοντας δίνει τη δυνατότητα να δοθεί περισσότερη έμφαση στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις, κατά τη διαδικασία εκτίμησης της μήτρας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων. Όσο μικρότερη η αξία του λ , τόσο μεγαλύτερο βάρος δίνεται στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Με αυτή τη μέθοδο η μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\Sigma}_{t+1} = (1 - \lambda) \sum_{s=0}^{T-1} \lambda^{s-1} R_{t-s} R'_{t-s} \quad (\text{II.4})$$

Παρόλο που η μέθοδος του εκθετικά σταθμισμένου κινητού μέσου «πιάνει» τη *volatility clustering*, τα υποδείγματα γενικευμένης αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (*GARCH*), που προτάθηκαν από τον Bollerslev (1986), προσφέρουν μια πιο πλούσια περιγραφή των ιδιοτήτων των αποδόσεων.

Η *Alexander* (2001) υποστηρίζει ότι αποδεικνύεται πως οι μακροπρόθεσμες προβλέψεις είναι περισσότερο ρεαλιστικές όταν προέρχονται από υποδείγματα *GARCH* σε σχέση με αυτές που προέρχονται από υποδείγματα εκθετικά σταθμισμένου κινητού μέσου. Επιπλέον, οι *Alexander* και *Leigh* (1997) αναλύοντας τις μεθόδους ισοδύναμα σταθμισμένης διακύμανσης-συνδιακύμανσης, εκθετικά σταθμισμένου κινητού μέσου και *GARCH*, διαπίστωσαν ότι ενώ η μέθοδος του εκθετικά σταθμισμένου κινητού μέσου είναι περισσότερο ακριβής στην εκτίμηση του κέντρου της κατανομής, οι ουρές, και κατά συνέπεια η εκτίμηση της *VaR*, μπορεί να είναι πολύ χαμηλή. Για αυτό το λόγο, παρόλο που η μέθοδος του εκθετικά σταθμισμένου κινητού μέσου είναι περισσότερο ακριβής, οι μέθοδοι ισοδύναμα σταθμισμένης διακύμανσης-συνδιακύμανσης και *GARCH* είναι πιο λειτουργικές.

2.1.2. ΠΛΗΡΩΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ: LOCATION-SCALE

2.1.2.a. *ARCH(p,q)*

Οι *Agelidis, Benos, Degiannakis* (2004) παρουσιάζοντας τα εξής υποδείγματα διακύμανσης υποθέτουν ότι: Έστω $r_t = \ln(S_t / S_{t-1})$ ο συνεχής σύνθετος ρυθμός των

αποδόσεων από το χρόνο $t-1$ στο χρόνο t , όπου S_t είναι η τιμή του χρηματοοικονομικού προϊόντος τη στιγμή t . Υποθέτουν ότι η χρονολογική σειρά του ρυθμού των αποδόσεων, r_t , αναλύεται σε δύο μέρη, το προβλέψιμο (συστηματικό) και το μη-προβλέψιμο (μη-συστηματικό) μέρος, $r_t = E(r_t | I_{t-1}) + \varepsilon_t$, όπου I_{t-1} είναι το σύνολο της πληροφορίας μέχρι και το χρόνο $t-1$, E ο δεσμευμένος μέσος (*mean operator*) και ε_t είναι το μη-προβλέψιμο μέρος (*innovation progress*). Ο δεσμευμένος μέσος της απόδοσης θεωρείται ως μια αυτοπαλίνδρομη διαδικασία βαθμού k , $AR(k)$:

$$E(r_t | I_{t-1}) = c_0 + \sum_{i=1}^k c_i r_{t-i}. \quad (\text{II.5})$$

Το μη-προβλέψιμο μέρος, ε_t , μπορεί να εκφραστεί ως μια *ARCH* διαδικασία της ακόλουθης μορφής:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t, \quad (\text{II.6})$$

όπου z_t είναι μια σειρά ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών (*iid*) με μέσο μηδέν και μοναδιαία διακύμανση. Η δεσμευμένη διακύμανση του ε_t είναι σ_t^2 , μια μεταβαλλόμενη στο χρόνο, θετική και μετρήσιμη συνάρτηση του συνόλου πληροφοριών μέχρι και το χρόνο $t-1$. Ας σημειωθεί ότι, παρόλο που ο διαταρακτικός όρος για το δεσμευμένο μέσο είναι σειριακά ασυσχέτιστος, δεν είναι ανεξάρτητος στο χρόνο.

Ανάλογη ανάλυση ακολουθούν και οι *Kuester, Mittnik και Paolella (2006)*, διατυπώνοντας ότι τα πλήρως παραμετρικά υποδείγματα της κατηγορίας *location-scale* βασίζονται στην υπόθεση ότι οι αποδόσεις ανήκουν σε μια *location-scale* οικογένεια πιθανοτήτων κατανομής της μορφής:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sigma_t z_t \quad (\text{II.7})$$

όπου η θέση (*location*) μ_t και η κλίμακα (*scale*) σ_t είναι F_{t-1} -μετρήσιμες παράμετροι. Επιπλέον $z_t \stackrel{iid}{\sim} fz(\cdot)$, όπου fz είναι μια μηδενικής θέσης (*zero-location*), μοναδιαίας κλίμακας (*unit-scale*) πυκνότητα πιθανότητας που μπορεί να

επιπρόσθετες παραμέτρους (όπως την παράμετρο των βαθμών ελευθερίας στην κατανομή *t-student*, ανάλογα με τις υποθέσεις που γίνονται για την κατανομή).

Σύμφωνα με τους *Kuester, Mittnik και Paolella (2006)* τα μη-δεσμευμένα παραμετρικά υποδείγματα θέτουν $\mu_t = \mu$ και $\sigma_t = \sigma$, και σαν αποτέλεσμα υποθέτουν ότι οι αποδόσεις είναι ισόνομα και ανεξάρτητα κατανεμημένες (*iid*) με πυκνότητα $\sigma^{-1} f(z) (\sigma^{-1} (r_t - \mu))$. Τα δεσμευμένα ομοσκεδαστικά παραμετρικά υποδείγματα λαμβάνουν υπόψη τους τη μεταβλητότητα στο χρόνο του δεσμευμένου μέσου. Μια *ARMA (p,q)* διαδικασία μπορεί να λάβει υπόψη της τη μεταβολή στο χρόνο του δεσμευμένου μέσου:

$$\mu_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{t-j}, \quad (\text{II.8})$$

με $\sigma_t = \sigma$, $t = 1, \dots, T$. Το παραπάνω υπόδειγμα έχει οριακή χρήση στην περίπτωση που παρατηρηθεί το εξής φαινόμενο, στην κατανομή των αποδόσεων να παρατηρούνται περίοδοι με υψηλή διακύμανση που ακολουθούνται από περιόδους με χαμηλή διακύμανση και το αντίστροφο (*volatility clustering*).

2.1.2.β. *GARCH(p,q)*

2.1.2.β.ι, *GARCH-N (ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ)*

Αντί του παραπάνω υποδείγματος, σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούνται τα δεσμευμένα ετεροσκεδαστικά παραμετρικά υποδείγματα, τα οποία επιτρέπουν στην παράμετρο κλίμακα να είναι συνάρτηση της παρελθούσας πληροφόρησης. Η πιο γνωστή μορφή ενός τέτοιου υποδείγματος είναι τα υποδείγματα *GARCH(p,q)*, που παρουσίασε πρώτος ο *Bollerslev (1986)*:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}^2 \quad (\text{II.9})$$

όπου $\alpha_0 > 0$ και $\alpha_i \geq 0$ για κάθε $i = 1, \dots, q$ και $b_j \geq 0$ για κάθε $j = 1, \dots, p$. Εάν $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p b_j < 1$, τότε η διαδικασία ε_t είναι στάσιμη και η μη-δεσμευμένη διακύμανσή της ισούται με

$$\sigma^2 = \alpha_0 \left/ \left(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p b_j \right) \right.. \quad (\text{II.10})$$

Το υπόδειγμα $GARCH(p,q)$ είναι μια γενίκευση του υποδείγματος $ARCH(p,q)$ που εισήγαγε ο Engle (1982). Ο Engle (1982) παρουσίασε τη δεσμευμένη διακύμανση ως μια γραμμική συνάρτηση των τετραγώνων των διαταρακτικών όρων των προηγούμενων περιόδων:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (\text{II.12})$$

όπου $\alpha_0 > 0$ και $\alpha_i \geq 0$ για κάθε $i = 1, \dots, q$ ούτως ώστε η δεσμευμένη διακύμανση να είναι θετική.

Σύμφωνα με τον Engle (1982) η κατανομή του z_t είναι η κανονική κατανομή, παρόλα αυτά αυτή η υπόθεση αποδείχθηκε ανεπαρκής. Το υπόδειγμα $GARCH$, που βασίζεται στην κανονική κατανομή ($GARCH-N$), καλύπτει κάποια «τυποποιημένα» χαρακτηριστικά των χρονολογικών σειρών των αποδόσεων, όπως η ετεροσκεδαστικότητα -η δεσμευμένη διακύμανση είναι ανεξάρτητη στο χρόνο (heteroskedasticity), το γεγονός ότι στην κατανομή τους παρατηρούνται περίοδοι με υψηλή διακύμανση να ακολουθούνται από περιόδους με χαμηλή διακύμανση και το αντίστροφο (volatility clustering) και την επιπλέον κύρτωση (excess kurtosis).

2.1.2.b.ii. GARCH-T (ΚΑΤΑΝΟΜΗ T-STUDENT)

Μια περισσότερο αποτελεσματική προέκταση των υποδειγμάτων ήταν η ενσωμάτωση σε αυτά των υποθέσεων για παχιές ουρές και ασυμμετρία της κατανομής. Ο Bollerslev (1987), λοιπόν, πρότεινε ως κατανομή της σειράς z_t , την τυποποιημένη t -student κατανομή με $v > 2$ βαθμούς ελευθερίας και πυκνότητα που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$D(z_t; v) = \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)\sqrt{\pi(v-2)}} \left(1 + \frac{z_t^2}{v-2} \right)^{-\frac{v+1}{2}}, \quad (\text{II.12})$$

όπου $\Gamma(v) = \int_0^\infty e^{-x} x^{v-1} dx$ είναι η συνάρτηση γάμμα και “ v ” είναι η παράμετρος που

περιγράφει το πόσο παχιές ή όχι είναι οι ουρές της κατανομής. Η κατανομή t -student είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν και για $v > 4$ η δεσμευμένη κύρτωση ισούται με $3(v-2)(v-4)$ - (υπερβαίνει την τιμή της κύρτωσης στην περίπτωση της κανονικής κατανομής που ισούται με 3). Όταν το “ v ” παίρνει μεγάλες τιμές η πυκνότητα της t -student κατανομής συγκλίνει με αυτή της κανονικής. Το μοντέλο *GARCH* που βασίζεται στην κατανομή t -student καλύπτει επιπλέον το χαρακτηριστικό των παχιών ουρών (*fat tails*) της δεσμευμένης κατανομής των αποδόσεων. Τα υποδείγματα *GARCH* συνδυασμένα με την *ασύμμετρη t-student* κατανομή εμφανίζουν πολύ καλές προβλέψεις (βλ. για παράδειγμα *Mittnik και Paolella (2000)*, *Giot και Laurent (2004)*).

2.1.2.B.iii. *GARCH* (ΚΑΤΑΝΟΜΗ GED)

Ο *Nelson (1991)* προτείνει μια άλλη κατανομή με παχιές ουρές, την *generalized error distribution (GED)* με πυκνότητα:

$$D(z_t; v) = \frac{v \exp(-0.5|z_t/\lambda|^v)}{2^{(1+1/v)} \Gamma(v^{-1}) \lambda}, \quad v > 0, \quad (\text{II.13})$$

όπου το “ v ” είναι η παράμετρος που περιγράφει το πόσο παχιές ή όχι είναι οι ουρές της κατανομής και

$$\lambda = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}{2^{\frac{2}{v}} \Gamma\left(\frac{3}{v}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{II.14})$$

Όταν $v = 2$, η σειρά z_t κατανέμεται κανονικά. Για τιμές του $v < 2$, η κατανομή της σειράς έχει πιο παχιές ουρές από την κανονική κατανομή, ενώ για $v < 2$ η κατανομή έχει πιο λεπτές ουρές από την κανονική κατανομή.

Το υπόδειγμα *GARCH(1,1)* καλύπτει αρκετά από τα χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών, όπως τις παχιές ουρές των αποδόσεων

(*fat tails*) και το γεγονός ότι στην κατανομή των αποδόσεων παρατηρούνται περίοδοι με υψηλή διακύμανση να ακολουθούνται από περιόδους με χαμηλή διακύμανση και το αντίστροφο (*volatility clustering*). Όμως, η δομή των υποδειγμάτων *GARCH* παρουσιάζει κάποια μειονεκτήματα στην εφαρμογή της. Η διακύμανση εξαρτάται μόνο από το μέγεθος και όχι από το πρόσημο των ε_t , κάτι που αντιτίθεται με την εμπειρική συμπεριφορά των τιμών των μετοχών της αγοράς όπου η ασύμμετρη σχέση μεταξύ τωρινής απόδοσης και μελλοντικής διακύμανσης (*leverage effect*) αποτελεί γεγονός. Ο Black (1976) εισήγαγε την έννοια του “*leverage effect*”, αναφερόμενος στην τάση για αρνητική συσχέτιση ανάμεσα στις μεταβολές των αποδόσεων των μετοχών και της διακύμανσης των αποδόσεων αυτών. Δηλαδή, η διακύμανση τείνει να αυξάνεται όταν οι αποδόσεις των μετοχών πέφτουν ($\varepsilon_t < 0$) και να μειώνεται όταν οι αποδόσεις των μετοχών αυξάνονται ($\varepsilon_t > 0$). Επιπλέον οι Brooks και Persand (2003) ισχυρίζονται ότι ένα υπόδειγμα *VaR* που δε λαμβάνει υπόψη του ασυμμετρίες στη διακύμανση είναι πολύ πιθανό να δώσει ανακριβείς προβλέψεις.

2.1.2.B.iv. *E-GARCH*

Ο Nelson (1991), με στόχο να συμπεριλάβει σε ένα υπόδειγμα την ασυμμετρία στα δεδομένα, προτείνει το εκθετικό *GARCH* (*exponential GARCH-EGARCH(p,q)*) υπόδειγμα:

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \left(\alpha_i \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| + \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right) + \sum_{j=1}^p b_j \ln(\sigma_{t-j}^2) \quad (\text{II.15})$$

σε αντίθεση με το υπόδειγμα *GARCH*, δε χρειάζεται να επιβληθεί κανένας περιορισμός για την εκτίμηση του υποδείγματος, εφόσον ο λογαριθμικός μετασχηματισμός εγγυάται ότι οι προβλέψεις για τη διακύμανση θα είναι μη-αρνητικές. Η παράμετρος γ_i επιτρέπει να λάβουμε υπόψη μας την ασυμμετρία (*leverage effect*). Εάν $\gamma_i = 0$ τότε μια θετική έκπληξη, $\varepsilon_t > 0$, έχει την ίδια επίδραση με μια αρνητική έκπληξη, $\varepsilon_t < 0$. Ελέγχοντας την υπόθεση $\gamma_i < 0$ ελέγχουμε την ύπαρξη ή όχι του “*leverage effect*”, δηλαδή αν το γ_i δεν είναι στατιστικά σημαντικό, δεν υπάρχει και η ασύμμετρη σχέση μεταξύ τωρινής απόδοσης και μελλοντικής διακύμανσης (*leverage effect*).

2.1.2.b.v. *T-GARCH*

Υπάρχει πληθώρα διατυπώσεων των πιθανών δεσμευμένων διακυμάνσεων. Το υπόδειγμα “*threshold*” *GARCH-TGARCH(p,q)* ανήκει στα πιο ευρέως διαδεδομένα:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}^2 , \quad (\text{II.16})$$

όπου $d_t = 1$ εάν $\varepsilon_t < 0$, και $d_t = 0$ αλλιώς. Προσδίδει διαφορετικούς συντελεστές στη διακύμανση στις περιπτώσεις που οι αποδόσεις των μετοχών αυξάνονται ή μειώνονται.

Σύμφωνα με τους *Agelidis, Benos και Dediannakis (2004)*, παρόλο τον μεγάλο αριθμό των παραμετρικών υποδειγμάτων που μοντελοποιούν την ασυμμετρία, οι δύο παραπάνω οικογένειες υποδειγμάτων είναι οι πιο ευρέως διαδεδομένες.

2.1.3. ΠΛΗΡΩΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ: ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ

2.1.3.a. *MixN-GARCH(p,q)*

Μια εναλλακτική περίπτωση υποδείγματος είναι ο συνδυασμός της δομής ενός υποδείγματος *GARCH* με μία ανάμειξη κανονικών κατανομών, λαμβάνοντας υπόψη τη δυναμική ανατροφοδότηση μεταξύ των κανονικών συστατικών στοιχείων (*normal components*). Το υπόδειγμα είναι ελκυστικό γιατί λαμβάνει υπόψη του μια οικονομική ερμηνεία σε όρους ροής πληροφόρησης ανάμεσα σε ομάδες παραγόντων.

Οι *Kuester, Mittnik και Paolella (2006)* παρουσιάζουν εν συντομίᾳ ότι, η χρονολογική σειρά $\{\varepsilon_t\}$ προκύπτει από μια διαδικασία ανάμειξης κανονικών *GARCH(p,q)* υποδειγμάτων n -παραγόντων, (*MixN-GARCH*) εάν η δεσμευμένη κατανομή των $\{\varepsilon_t\}$ είναι μια μείζη κανονικών n -παραγόντων με μέσο μηδέν,

$$\varepsilon_t / F_{t-1} \sim MN(\omega, \mu, \sigma^2), \quad (\text{II.17})$$

όπου $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\sigma^2 = (\sigma_{1t}^2, \dots, \sigma_{nt}^2)$ και η πυκνότητα των ανάμειξης των κανονικών κατανομών δίνεται από:

$$f_{MN}(y; \omega, \mu, \sigma^2) = \sum_{j=1}^n \omega_j \phi(y; \mu_j, \sigma_{jt}^2), \quad (\text{II.18})$$

όπου ϕ είναι η κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $\omega_j \in (0,1)$ με $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ για να εξασφαλίσουμε ότι ο μέσος είναι μηδέν, $\mu_n = -\sum_{j=1}^{n-1} (\omega_j / \omega_n) \mu_j$.

Και τέλος, η διακύμανση δίνεται από το υπόδειγμα *GARCH*:

$$\sigma_t^{(2)} = \gamma_0 + \sum_{i=1}^r \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \Psi_j \sigma_{t-j}^{(2)}, \quad (\text{II.19})$$

όπου $\gamma_i = (\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{in})'$, $i = 0, \dots, r$ είναι διανύσματα διαστάσεων $n \times 1$ και Ψ_j , $j = 1, \dots, s$ είναι μήτρες διαστάσεων $n \times n$. Οι *Kuester, Mittnik και Paolella (2006)* περιορίζουν τις μήτρες Ψ_j να είναι διαγώνιες, ώστε, όπως ισχυρίζονται και οι *Haas, Mittnik και Paolella (2004)*, προκύπτει ένα πιο φειδωλό υπόδειγμα το οποίο δε χάνει την ποιότητα του όσον αφορά το ταίριασμα στα δεδομένα και την ικανότητα πρόβλεψης.

2.1.4. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

2.1.4.A. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ *GARCH(p,q)*

Στην πολυμεταβλητή περίπτωση, για κάθε στοιχείο της μήτρας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων, το χαρακτηριστικό της εξάρτησης από το χρόνο δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{ij,t+1} = f(R_{i,t}, R_{j,t}, \sigma_{ij,t}), \quad \forall i, j \quad (\text{II.20})$$

Παρόλα αυτά, καθώς ο αριθμός των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν σε πολυμεταβλητά *GARCH* υποδείγματα αυξάνεται, αυξάνεται και ο βαθμός δυσκολίας εκτίμησης των παραμέτρων αυτών. Οι *Engle και Kroner (1995)* προτείνουν τη μεθοδολογία *BEKK*, η οποία είναι ευρέως διαδεδομένη, ως μία πιο εύκολα εφαρμόσιμη μεθοδολογία. Παρόλα αυτά, ο αριθμός των παραμέτρων που θα πρέπει να εκτιμηθούν εξακολουθεί να παραμένει μεγάλος, και σαν αποτέλεσμα είναι δύσκολη η ερμηνεία των συντελεστών των παραμέτρων.

2.1.4.β. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ GARCH(p,q) ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

Ο Engle (2000) ανέπτυξε μία νέα κατηγορία υποδειγμάτων, τα πολυμεταβλητά GARCH υποδείγματα δυναμικής δεσμευμένης συσχέτισης (*dynamic conditional correlation- DCC*), τα οποία μειώνουν περισσότερο τον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν. Οι Engle, Ng και Rothschild (1990) χρησιμοποίησαν την ανάλυση παραγόντων ώστε να μπορούν με έναν μικρό αριθμό παραγόντων να περιγράψουν ένα μεγάλο τμήμα της δομής της μήτρας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων.

2.1.4.γ. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ O-GARCH(p,q)

Αυτή την ιδέα επέκτειναν αρχικά οι Alexander και Chibumba (1998), οι οποίοι πρότειναν ένα «օρθογώνιο» GARCH (O-GARCH) υπόδειγμα. Αρχικά η προσέγγισή τους «օρθογωνοποιεί» τους παράγοντες του κινδύνου. Αυτοί οι «օρθογώνιοι» παράγοντες του κινδύνου είναι γνωστοί ως «κύρια συστατικά μέρη» (*principle components*). Δεδομένου ότι είναι εξ ορισμού τους «օρθογώνια», δε χρειάζεται να εκτιμηθούν οι συνδιακυμάνσεις τους. Με αυτόν τον τρόπο μειώνονται και οι παράγοντες που πρέπει να εκτιμηθούν. Η προσέγγιση που αναπτύχθηκε περισσότερο από τον Alexander (2001, 2002), αναλύεται παρακάτω:

Προσδιορίζουμε τη μήτρα R (διαστάσεων $T \times k$), ώστε να αποκτήσουμε το πλήρες σύνολο των ιστορικών αποδόσεων. Έστω W (διαστάσεων $k \times k$) η μήτρα των «eigenvectors» της $R'R$. Τα «օρθογώνια κύρια συστατικά μέρη» είναι το διάνυσμα στήλης $[P_1 \dots P_k]$ όπου:

$$P = [P_1 \dots P_k] = RW \quad (\text{II.21})$$

Λύνοντας ως προς R και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της W , ότι η αντίστροφη είναι ίση με την ανάστροφη (*inverse-transpose*), μπορούμε να γράψουμε την αλλαγή στον παράγοντα κινδύνου ως γραμμικό συνδυασμό των «κύριων συστατικών μερών» όπου τα βάρη στάθμισης θα είναι τα στοιχεία του i «eigenvector»:

$$R = PW' \quad (\text{II.22})$$

$$\Rightarrow R_i = \omega_{i1}P_1 + \omega_{i2}P_2 + \dots + \omega_{ik}P_k$$

Η εκτίμηση της Σ_t δίνεται:

$$\hat{\Sigma}_t = W \text{ var}(P) W' \quad (\text{II.23})$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι χρειάζεται να εκτιμηθούν μόνο οι eigenvectors της $R'R$ και τα διαγώνια στοιχεία της $\text{var}(P)$ για να υπολογιστεί η Σ_t . Επιπλέον, κάθε ορθογώνιος παράγοντας μπορεί να μοντελοποιηθεί ανεξάρτητα, με μία μονομεταβλητή δομή, χρησιμοποιώντας ένα GARCH υπόδειγμα.

Ο Engle (2000) αξιολόγησε τα τρία παραπάνω πολυμεταβλητά GARCH υπόδειγματα. Ενώ καταλήγει ότι το δικό του πολυμεταβλητό GARCH υπόδειγμα δυναμικής δεσμευμένης συσχέτισης (*dynamic conditional correlation- DCC*) δίνει καλύτερες εκτιμήσεις, διαπιστώνει ότι και το υπόδειγμα *O-GARCH* δίνει πολύ καλές εκτιμήσεις σύμφωνα με τους ελέγχους. Τέλος, σχολιάζει ότι και τα δύο υπόδειγματα, *DCC*, *O-GARCH* δίνουν καλύτερες εκτιμήσεις από τη μεθοδολογία *BEKK*.

2.2. Μη-ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

2.2.1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

Η ιστορική προσομοίωση (*historical simulation*) είναι ένα μη-παραμετρικό υπόδειγμα, το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως από χρηματοοικονομικούς οργανισμούς για την εκτίμηση της VaR. Όντας μια μη-παραμετρική μέθοδος, η ιστορική προσομοίωση δεν απαιτεί καμία υπόθεση για την κατανομή των αποδόσεων των παραγόντων του κινδύνου (*risk factors*). Βασίζεται μόνο στην ιστορική κατανομή των αποδόσεων των αντίστοιχων παραγόντων κινδύνου. Αυτό συνεπάγεται ότι οι παχιές ουρές (*fat tails*) αυτόματα συμπεριλαμβάνονται στις εκτιμήσεις της VaR. Για την ιστορική προσομοίωση, η εκτίμηση της VaR για την χρονική στιγμή $t-1$ δίνεται από το λ -ποσοστιαίο σημείο, $\hat{Q}_\lambda(\cdot)$, ενός κινητού δείγματος (*window*) με w παρατηρήσεις μέχρι και τη χρονική στιγμή t είναι:

$$VaR_{t-1} = -\hat{Q}_\lambda(r_t, r_{t-1}, \dots, r_{t-w+1}). \quad (\text{II.24})$$

Για παράδειγμα, για ένα κινητό δείγμα έκτασης $w = 1000$ παρατηρήσεων, η 5% εκτίμηση της VaR είναι απλά η αρνητική τιμή της 50^{ος} παρατήρησης ($1000 \times 5\%$).

Οι μέθοδοι που βασίζονται την ιστορική προσομοίωση είναι ιδιαίτερα γνωστοί για τη μέτρηση του κινδύνου γιατί είναι σχετικά εύκολες στην εφαρμογή τους και γιατί δεν απαιτούν την εκτίμηση της μήτρας συνδιακυμάνσεων των παραγόντων του κινδύνου, σύμφωνα με τους *Kuester, Mittnik και Paolella (2006)*.

Ο δεσμευμένος κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου βασίζεται στη δεσμευμένη κατανομή των παραγόντων του κινδύνου που επηρεάζουν την αξία του χαρτοφυλακίου. Υπάρχουν πολλοί τρόποι υπολογισμού της δεσμευμένης κατανομής, τρεις από αυτούς είναι η ιστορική προσομοίωση, η γενίκευση αυτής που παρουσιάζεται από τους *Boudoukh, Richardson και Whitelaw (1998)* και η προσαρμοσμένη ιστορική προσομοίωση που παρουσιάζεται από τους *Hull και White (1998)*. Το συμπέρασμα του *Pritsker (2001)* είναι ότι οι μέθοδοι υπολογισμού της VaR που βασίζονται στην ιστορική προσομοίωση τείνουν να μην ανταποκρίνονται άμεσα στις αλλαγές του δεσμευμένου κινδύνου του χαρτοφυλακίου. Επιπλέον, διαπιστώνει ότι οι μέθοδοι που βασίζονται στην ιστορική προσομοίωση, όταν εφαρμόζονται στην εκτίμηση της VaR, ανταποκρίνονται με ασύμμετρο τρόπο στις αλλαγές του κινδύνου. Συγκεκριμένα, η εκτίμηση του κινδύνου αυξάνεται όταν το χαρτοφυλάκιο υφίσταται μεγάλες απώλειες, ενώ δεν παρατηρείται κάτι ανάλογο στην ύπαρξη υψηλών κερδών.

Οι εκτιμήσεις της VaR αξιολογούνται με βάση το αν προσφέρουν ορθή δεσμευμένη ή μη κάλυψη. Μια εκτίμηση VaR παρέχει ορθή μη-δεσμευμένη κάλυψη εάν η εκτίμηση σε επίπεδο εμπιστοσύνης $k\%$ υπερβαίνει το $k\%$ των φορών σε πολύ μεγάλα δείγματα. Στην ουσία, μια εκτίμηση VaR που παρέχει μη-δεσμευμένη κάλυψη είναι ορθή κατά μέσο όρο. Ένα πιο αυστηρό κριτήριο είναι αυτό της δεσμευμένης κάλυψης. Αυτό το κριτήριο συνεπάγεται ότι εάν ο κίνδυνος, και κατά συνέπεια και η VaR ενός χαρτοφυλακίου αλλάζει μέρα με την ημέρα, τότε η εκτίμηση της VaR πρέπει να προσαρμόζεται ούτως ώστε να προσφέρει την ορθή VaR για κάθε μέρα.

Ένα βασικό μειονέκτημα της ιστορικής προσομοίωσης είναι ότι υπολογίζει την εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής σταθμίζοντας κάθε απόδοση με την ίδια πιθανότητα, $1/N$. Αυτό είναι ισοδύναμό με την υπόθεση ότι οι αποδόσεις κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα στο χρόνο (*iid*). Η υπόθεση αυτή είναι μη ρεαλιστική, γιατί είναι γνωστό ότι η διακύμανση των αποδόσεων μεταβάλλεται στο χρόνο.

2.2.1.Α. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

Όταν οι αποδόσεις δεν κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα είναι λογικό να συμπεράνουμε ότι οι αποδόσεις από το πιο πρόσφατο παρελθόν αντιπροσωπεύουν καλύτερα το σημερινό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Αυτή την ιδέα χρησιμοποίησαν οι *Boudoukh, Richardson και Whitelaw (1998)- BRW* για να παρουσιάσουν τη μέθοδο της γενικευμένης ιστορικής προσομοίωσης, σταθμίζοντας με μεγαλύτερο συντελεστή της αποδόσεις του πιο πρόσφατου παρελθόντος. Συγκεκριμένα οι συντελεστές των πιθανοτήτων αθροίζουν στη μονάδα και μειώνονται εκθετικά. Για παράδειγμα, εάν λ , ένα αριθμός ανάμεσα στο μηδέν και τη μονάδα, είναι ο συντελεστής εκθετικής μείωσης, και $w(1)$ είναι ο συντελεστής στάθμισης της πιο πρόσφατης ιστορικής απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου, τότε η επόμενη πιο πρόσφατη απόδοση θα έχει συντελεστή στάθμισης $w(2) = \lambda * w(1)$, και η αμέσως επόμενη $w(3) = \lambda^2 * w(1)$ κ.ο.κ. Η εκτίμηση της *VaR* υπολογίζεται βασιζόμενη στην εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής των αποδόσεων με τους τροποποιημένους συντελεστές στάθμισης. Η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης είναι μια υποπερίπτωση της μεθόδου *BRW* εάν θέσουμε $\lambda = 1$.

Έστω ότι $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-N}$, είναι οι αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου και $w_{t-1}, w_{t-2}, \dots, w_{t-N}$, είναι οι εκθετικά μειούμενες πιθανότητες στάθμισης, όπου ισχύει:

$$\sum_{i=1}^N w_{t-i} = 1 \quad (\text{II.25})$$

όπου

$$w_{t-i-1} = \lambda * w_{t-i}. \quad (\text{II.26})$$

Δοθέντων των πιθανοτήτων στάθμισης, η *VaR* σε επίπεδο σημαντικότητας C μπορεί να υπολογιστεί από την εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $G(\cdot; t, N)$,

$$G(x; t, N) = \sum_{i=1}^N 1_{\{r_{t-i} \leq x\}} w_{t-i}. \quad (\text{II.27})$$

Επειδή η εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι διακριτή, η εκτίμηση της *VaR* είναι προσεγγιστική. Οα κυμαίνεται μεταξύ μιας τιμής που υποεκτιμά τη *VaR*

και μιας τιμής που την υπερεκτιμά. Η εκτίμηση της VaR την ημέρα t που υποεκτιμά τις απώλειες σε επίπεδο σημαντικότητας C δίνεται από τη σχέση:

$$BRW^u(t | \lambda, N, C) = \inf(r \in \{r_{t-1}, \dots, r_{t-N}\} | G(r : t, N) \geq C), \quad (\text{II.28})$$

και η εκτίμηση που τείνει να υπερεκτιμά τις απώλειες δίνεται από τη σχέση:

$$BRW^o(t | \lambda, N, C) = \sup(r \in \{r_{t-1}, \dots, r_{t-N}\} | G(r : t, N) \leq C), \quad (\text{II.29})$$

όπου λ είναι ο εκθετικός συντελεστής στάθμισης, N είναι το μέγεθος των δείγματος και C είναι το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας όπου εκτιμούμε τη VaR .

2.2.1.B. ΦΙΛΤΡΑΡΙΣΜΕΝΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ (FILTERED HISTORICAL SIMULATION-FHS)

Οι *Barone-Adesi*, *Giannopoulos* και *Vosper* (2000) στο άρθρο τους παρουσιάζουν τη μέθοδο της φιλτραρισμένης ιστορικής προσομοίωσης (*FHS*). Το κίνητρο της προσέγγισης τους ήταν ότι οι δύο μέθοδοι υπολογισμού της VaR δεν κάλυπταν ταυτόχρονα και τη δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα και τη μη-κανονικότητα της κατανομής των παραγόντων κινδύνου. Οι περισσότερες εφαρμογές της μεθόδου διακύμανσης-συνδιακύμανσης καλύπτουν τη δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα, αλλά υποθέτουν πολυμεταβλητή κανονικότητα. Σε αντίθεση, οι περισσότερες εφαρμογές της μεθόδου ιστορικής προσομοίωσης είναι μη-παραμετρικές στις υποθέσεις τους για την κατανομή των παραγόντων κινδύνου, αλλά δεν καλύπτουν τη δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα. Η μέθοδος της φιλτραρισμένης ιστορικής προσομοίωσης καλύπτει και τη δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα και τη μη-κανονικότητα της κατανομής των παραγόντων του κινδύνου.

Η μέθοδος αυτή είναι μία προσέγγιση του βασίζεται στη μέθοδο *Monte Carlo* και μοιάζει με τον υπολογισμό της VaR χρησιμοποιώντας ένα πλήρες παραμετρικό υπόδειγμα *Monte Carlo*.

2.2.1.B.i. ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Ο *Pristker* (2001) στο άρθρο του υποθέτει ότι η χρονολογική σειρά του παράγοντα του κινδύνου περιγράφεται με μια διαδικασία *GARCH(1,1)*

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \hat{\sigma}_t^2 = a_0 + a_1 r_{t-1}^2 + b_1 \hat{\sigma}_{t-1}^2 \quad , \quad (II.30)$$

Και η δεσμευμένη διακύμανση των αποδόσεων τη χρονική στιγμή $t-1$ είναι h_{t-1} . Δοθέντων των προηγούμενων συνθηκών, η εκτίμηση της VaR για ορίζοντα 10 ημερών (χρονικός ορίζοντας που απαιτείται από τη *Βασιλεία I*) μπορεί να υπολογιστεί προσομοιώνοντας αποδόσεις 10 ημερών χρησιμοποιώντας ένα πλήρως παραμετρικό υπόδειγμα *Monte Carlo*. Εκτιμώντας το διαταρακτικό όρο ε_{t+1} από την κατανομή των ε_t και εφαρμόζοντας την εκτίμηση στη σχέση (II.30) προκύπτει η εκτίμηση για το r_{t+1} και το h_{t+2} . Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία μπορούμε να υπολογίσουμε εκτιμήσεις 10 ημερών για τις δεσμευμένες αποδόσεις.

Γίνεται η απλή παραμετρική υπόθεση για την κατανομή των ε_t για να διευκολυνθεί η διαδικασία δημιουργίας εκτιμήσεων για τα r_t . Συγκεκριμένα γίνεται η υπόθεση ότι τα ε_t κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα στο χρόνο με μέσο μηδέν και διακύμανση ίση με τη μονάδα. Η μέθοδος *FHS* δεν υποθέτει κανονικότητα στην κατανομή των ε_t , ενώ υποθέτει ότι τα ε_t είναι τέτοια ώστε οι παράμετροι του υποδείγματος *GARCH(1,1)* να μπορούν να εκτιμηθούν με συνέπεια. Εάν οι παράμετροι εκτιμούνται με συνέπεια και είναι και ορθές, τότε οι εκτιμήσεις των h_t είναι σωστές σε κάθε χρονική στιγμή.

Συμπερασματικά η μέθοδος *FHS* είναι πιθανόν να καλύπτει τη δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα των δεδομένων παρόλο που μπορεί να μην κάνει περιοριστικές υποθέσεις για την κατανομή των παραγόντων των αποδόσεων. Για αυτό το λόγο η μέθοδος *FHS* φαίνεται να συνδυάζει τα καλύτερα στοιχεία των υποδειγμάτων δεσμευμένης διακύμανσης και της μεθόδου ιστορικής προσομοίωσης.

2.2.1.B.ii. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Υπάρχουν πολλοί τρόποι, σύμφωνα με τον *Pristker (2001)*, για να επεκταθεί η μεθοδολογία στην πολυμεταβλητή περίπτωση. Ο πιο απλός τρόπος επέκτασης της μονομεταβλητής περίπτωσης στην πολυμεταβλητή γίνεται υποθέτοντας ότι κάθε παράγοντας κινδύνου ακολουθεί μια διαδικασία *GARCH* στην οποία η τρέχουσα διακύμανση της είναι μία συνάρτηση των *lags* του παράγοντα και των *lags* της δεσμευμένης διακύμανσης του παράγοντα. Για να ολοκληρωθεί η επέκταση

χρειάζεται να γίνει η εξής υπόθεση για την κατανομή των ε_t , $\varepsilon_t = (\varepsilon_{i,t}, i=1\dots N)$. Η απλούστερη υπόθεση για την κατανομή των ε , είναι ότι κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα στο χρόνο. Κάτω από αυτή την υπόθεση είναι εύκολη η εφαρμογή της μεθόδου *FHS*. Όπως και στη μονομεταβλητή περίπτωση, τα στοιχεία του διανύσματος ε_t προσδιορίζονται εκτιμώντας τα υποδείγματα *GARCH* για κάθε παράγοντα κινδύνου.

Αυτή η απλή πολυμεταβλητή προέκταση είναι και το επίκεντρο του ενδιαφέροντος των *Barone-Adesi, Giannopoulos και Vosper (1999)*. Αυτή η προέκταση έχει δύο ιδιότητες που διευκολύνουν την εκτίμηση. Πρώτον, τα υποδείγματα διακύμανσης είναι πολύ απλά. Δε χρειάζεται να εκτιμήσεις ένα πολυμεταβλητό υπόδειγμα *GARCH* για να τα εφαρμόσεις. Το δεύτερο πλεονέκτημα αφορά στο ότι η μέθοδος δεν περιλαμβάνει την εκτίμηση της μήτρας συσχέτισης των παραγόντων. Παρόλα αυτά, η συσχέτιση των παραγόντων μοντελοποιείται εύκολα κάτω από την υπόθεση ότι τα ε_t κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα.

Όμως, παρόλο που η απλούστερη πολυμεταβλητή επέκταση της *FHS* έχει πλεονεκτήματα, οι υποθέσεις οι οποίες χρησιμοποιεί δεν είναι «ακίνδυνες-innocuous». Η υπόθεση ότι η διακύμανση εξαρτάται τα *lags* και από τη *lagged* διακύμανση ενός παράγοντα κινδύνου, μπορεί να αποδειχθεί μη ρεαλιστική, είτε σε ένα μονομεταβλητό υπόδειγμα είτε σε ένα πολυμεταβλητό. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τον *Pristker (1997)*, εάν οι παράγοντες του κινδύνου είναι οι αποδόσεις του δείκτη *FTSE* και του δείκτη *S&P 500*, τότε εάν ο δείκτης *S&P 500* έχει υψηλή διακύμανση σήμερα, τότε μπορεί να επηρεάσει τη διακύμανση του δείκτη *FTSE* αύριο. Επιπλέον, η υπόθεση ότι τα ε_t κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα υπονοεί ότι η δεσμευμένη συσχέτιση των παραγόντων του κινδύνου είναι σταθερή στο χρόνο. Και αυτή η υπόθεση είναι πιθανόν να παραβιάζεται στην πράξη.

Παρόλο που οι υποθέσεις της απλούστερης μορφής επέκτασης του υποδείγματος *FHS* είναι πιθανόν να παραβιάζονται στην πράξη, αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί τροποποιώντας τη μοντελοποίηση του υποδείγματος όπου χρειάζεται. Για παράδειγμα, η μοντελοποίηση της διακύμανσης μπορεί να βελτιωθεί δεσμεύοντας το υπόδειγμα σε *lagged* αξίες άλλων χρηματοοικονομικών στοιχείων. Ομοίως, συσχετίσεις που μεταβάλλονται στο χρόνο μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσα από τη δομή των πολυμεταβλητών *GARCH* υποδειγμάτων.

Για να δείξει τη δυνατότητα βελτίωσης πάνω στις απλές εφαρμογές της μεθόδου FHS, ο Pristker (1997), υποθέτει ότι ο δεσμευμένος μέσος και η μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των παραγόντων εξαρτώνται από τις παρελθούσες τιμές των παραγόντων. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι r_t είναι οι παράγοντες τη χρονική στιγμή t , h_{r_t} , είναι οι παρελθούσες τιμές των παραγόντων του κινδύνου πριν από τη χρονική στιγμή t . Έστω θ οι παράμετροι των δεδομένων που προκύπτουν από τη διαδικασία, $\mu(h_{r_{t-1}}, \theta)$ είναι ο δεσμευμένος μέσος των παραγόντων τη χρονική στιγμή t και $\Sigma(h_{r_{t-1}}, \theta)$ είναι η μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των δεσμευμένων r_t .

Δοθέντων των παραπάνω, ο Pristker (2001) υποθέτει ότι τα r_t προκύπτουν από την ακόλουθη διαδικασία

$$r_t = \mu(h_{r_{t-1}}, \theta) + \sum(h_{r_{t-1}}, \theta)^{1/2} \varepsilon_t \quad (\text{II.31})$$

όπου θ είναι οι παράμετροι του υποδείγματος του δεσμευμένου μέσου και της διακύμανσης, και τα ε_t κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα στο χρόνο με μέσο μηδέν και διακύμανση I . Εφόσον η σχέση (II.29) είναι η διαδικασία που παράγονται τα δεδομένα, τότε κάτω από κατάλληλες συνθήκες (Bollerslev και Wooldridge, 1992), οι παράμετροι θ μπορούν να εκτιμηθούν με τη μέθοδο της οιονεί-μεγίστης πιθανοφάνειας.¹ Για αυτό το λόγο, τα ε_t μπορούν να προσδιοριστούν, και η μέθοδος FHS μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτή την πιο γενικευμένη περίπτωση.²

2.2.1.Γ. ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

Όπως ήδη αναφέραμε τα πλεονεκτήματα της ιστορικής προσομοίωσης είναι ότι είναι κατανοητή, εύκολη στην εφαρμογή της και ότι δε βασίζεται σε παραμετρικές

¹ Στη μέθοδο της οιονεί-μεγίστης πιθανοφάνειας (QMLE), οι παράμετροι θ εκτιμώνται με τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας με τα ε_t να κατανέμονται κανονικά. Κάτω από τις κατάλληλες συνθήκες, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων θ είναι συνεπείς και ασυμπτωτικά κανονικές ακόμα και όταν τα ε_t δεν κατανέμονται κανονικά.

² Έστω $\hat{\theta}$ μία συνεπείς εκτίμηση του θ . Τότε εφόσον τα h_n είναι παρατηρήσιμα, από τη σχέση (4), μία συνεπείς εκτίμηση για τα ε_t δίνεται από: $\varepsilon_t = \Sigma(h_{r_{t-1}}, \theta)^{-1/2} [r_t - \mu(h_{r_{t-1}}, \theta)]$

υποθέσεις για τις κατανομές των αποδόσεων. Ένα από τα κύρια μειονεκτήματά της είναι το ότι δεν καλύπτει το γεγονός ότι στην κατανομή των αποδόσεων παρατηρούνται περίοδοι με υψηλή διακύμανση να ακολουθούνται από περιόδους με χαμηλή διακύμανση και το αντίστροφο (*volatility clustering*). Αυτό έχει ως συνέπεια, εάν η τρέχουσα διακύμανση των αποδόσεων είναι μεγαλύτερη (μικρότερη) από την μέση διακύμανση των αποδόσεων σε ένα δείγμα, η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης θα εκτιμήσει μια *VaR* πολύ χαμηλή (υψηλή) από τον πραγματικό κίνδυνο.

Για τον παραπάνω λόγο, οι *Miazhynskaia* και *Aussenegg* (2005), στο άρθρο τους χρησιμοποιούν τη μέθοδο της προσαρμοσμένης (*adjusted*) ιστορικής προσομοίωσης, που προτάθηκε από τους *Hull* και *White* (1998). Σε αυτή την προσέγγιση όλες οι ημερήσιες αποδόσεις του δείγματος προσαρμόζονται (σταθμίζονται) συγκρίνοντας τη διακύμανση των αποδόσεων κάθε ημέρας συναλλαγής του δείγματος με την τρέχουσα διακύμανση (π.χ. τη διακύμανση της τελευταίας περιόδου του δείγματος). Η απόδοση $r(t_h)$ για μια συγκεκριμένη ημέρα συναλλαγής t_h του δείγματος σταθμίζεται από το λόγο της πρόβλεψης της διακύμανσης για την τρέχουσα ημέρα συναλλαγής $\sigma(t_0)$ προς την πρόβλεψη της διακύμανσης για την ιστορική ημέρα συναλλαγής t_h . Η τρέχουσα μέρα συναλλαγής t_0 είναι η ημέρα συναλλαγής για την οποία θέλουμε να υπολογίσουμε τη *VaR*. Η προσαρμοσμένη διακύμανση των αποδόσεων $r(t_h)_{adj}$ για την (ιστορική) ημέρα συναλλαγής t_h δίνεται από:

$$r(t_h)_{adj} = r(t_h) \cdot \frac{\sigma(t_0)}{\sigma(t_h)}, \quad (\text{II.32})$$

όπου $\sigma(t_h)$ και $\sigma(t_0)$ είναι *EWMA* (exponentially weighted moving average) διαδικασίες πρόβλεψης της διακύμανσης των αποδόσεων για τις ημέρες συναλλαγής t_h και t_0 αντίστοιχα. Έχοντας σταθμίσει όλες τις αποδόσεις του δείγματος, το $(100-p)\%VaR$ ορίζεται ως το p^* ποσοστιαίο σημείο της κατανομής των σταθμισμένων αποδόσεων.

3. ΕΚΤΙΜΗΣΗ

3.1. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Για την εκτίμηση των υποδειγμάτων *ARCH* χρησιμοποιείται συχνά η μέθοδος της μεγίστης πιθανοφάνειας. Υπό την υπόθεση ότι ο διαταρακτικός όρος είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένος (*iid*) και έχει συνάρτηση πυκνότητας $D(z_t; \nu)$, η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας του $\{y_t(\theta)\}$ για ένα δείγμα T παρατηρήσεων είναι της μορφής:

$$L_T(\{y_t\}; \theta) = \sum_{t=1}^T \left[\ln[D(z_t(\theta); \nu)] - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2(\theta)) \right], \quad (\text{II.33})$$

όπου θ είναι το διάνυσμα των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν για το δεσμευμένο μέσο, τη δεσμευμένη διακύμανση και τη συνάρτηση πυκνότητας και ισχύει ότι $z_t(\theta) = \frac{\varepsilon_t(\theta)}{\sigma_t(\theta)}$. Ο εκτιμητής της πιθανοφάνειας $\hat{\theta}$ μεγιστοποιεί την (6). Για

αυτό το λόγο, η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας για ένα δείγμα T παρατηρήσεων είναι ως εξής:

α. Εάν τα z_t κατανέμονται κανονικά:

$$L_T(\{y_t\}; \theta) = -\frac{1}{2} \left[T \ln(2\pi) + \sum_{t=1}^T z_t^2 + \sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) \right] \quad (\text{II.34})$$

β. Εάν τα z_t κατανέμονται σύμφωνα με την *t-student*:

$$L_T(\{y_t\}; \theta) = T \left[\ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln[\pi(\nu-2)] \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(\sigma_t^2) + (1+\nu) \ln\left(1 + \frac{z_t^2}{\nu-2}\right) \right] \quad (\text{II.35})$$

γ. Εάν τα z_t κατανέμονται σύμφωνα με την *G.E.D.*:

$$L_T(\{y_t\}; \theta) = \sum_{t=1}^T \left[\ln\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) - \frac{1}{2} \left| \frac{z_t}{\lambda} \right|^{\nu} - (1+\nu^{-1}) \ln(2) - \ln \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) \right] \quad (\text{II.36})$$

3.2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΟΙΟΝΕΙ-ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Σε αυτή την προσέγγιση οι *Miazhynshaia, Aussenegg (2005)* ακολουθούν τη μεθοδολογία των *Bams et al. (2003)* για να προσδιορίσουν την αβεβαιότητα των παραμέτρων στον υπολογισμό της *VaR*. Ξεκινούν με την εκτίμηση των παραμέτρων $\hat{\theta}^{ML}$ με τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας και υπό την υπόθεση μιας ασυμπτωτικά κανονικής κατανομής των παραμέτρων του υποδείγματος

$$\theta \sim N(\hat{\theta}^{ML}, \Theta) \quad (\text{II.37})$$

Η αβεβαιότητα για τις παραμέτρους ποσοτικοποιείται από την εκτιμώμενη μήτρα συνδιακυμάνσεων (*Davidson και MacKinnon, 1993*)

$$\Theta = \hat{H}^{-1} (\hat{G}^T \hat{G}) \hat{H}^{-1} , \quad (\text{II.38})$$

\hat{H} : *Hessian matrix* υπολογισμένη στο $\hat{\theta}^{ML}$

G : *Score vector* $\left(\frac{\partial l(y^t | \theta)}{\partial \theta_i} \right)_{t,i}$ υπολογισμένη στο $\hat{\theta}^{ML}$ και $l(Y | \theta)$ είναι ο λογάριθμος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $L(Y|\theta)$.

Χρησιμοποιούν την κατανομή των παραμέτρων (II.37) για να υπολογίσουν την αβεβαιότητα στην *VaR*.

Οι *Agelidis, Benos, Degiannakis (2004)*, χρησιμοποιούν τον εκτιμητή της οιονεί-μεγίστης πιθανοφάνειας (*quasi-maximum likelihood estimator-QMLE*), όπου σύμφωνα με τους *Bollerslev και Wooldridge (1992)*, έχει μια κανονική οριακή κατανομή και παρέχει ασυμπτωτικά τυποποιημένα σφάλματα, τα οποία είναι αξιόπιστα και υπό συνθήκες μη-κανονικότητας.

Συνοψίζοντας, η πρόβλεψη για την δεσμευμένη διακύμανση για μια περίοδο μπροστά, $\hat{\sigma}_{t+1|t}^2$, για το υπόδειγμα *GARCH(p,q)* δίνεται από:

$$\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=0}^q \alpha_i^{(t)} \varepsilon_{t-i+1}^2 + \sum_{j=1}^p b_j^{(t)} \sigma_{t-j+1}^2 \quad (\text{II.39})$$

Για το υπόδειγμα $EGARCH(p,q)$ δίνεται από:

$$\ln \hat{\sigma}_{t+1|t}^2 = \alpha_0^{(t)} + \sum_{i=1}^q \left(\alpha_i^{(t)} \left| \frac{\varepsilon_{t-i+1}}{\sigma_{t-i+1}} \right| + \gamma_i^{(t)} \frac{\varepsilon_{t-i+1}}{\sigma_{t-i+1}} \right) + \sum_{j=1}^p b_j^{(t)} \ln(\sigma_{t-j+1}^2) \quad (\text{II.40})$$

Τέλος, για το υπόδειγμα $TGARCH(p,q)$ δίνεται από:

$$\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 = \alpha_0^{(t)} + \sum_{i=1}^q \alpha_i^{(t)} \varepsilon_{t-i+1}^2 + \gamma^{(t)} \varepsilon_t^2 d_t + \sum_{j=1}^p b_j^{(t)} \sigma_{t-j+1}^2 \quad (\text{II.41})$$

Σαν αποτέλεσμα, η πρόβλεψη για τη VaR για μια περίοδο μπροστά κάτω από όλες τις υποθέσεις για την κατανομή των z_t και υπό την υπόθεση ότι οι παρατηρήσεις έχουν μέσο μηδέν, δίνεται από τη σχέση:

$$VaR_{t+1|t} = F(a) \hat{\sigma}_{t+1|t} \quad (\text{II.42})$$

όπου $F(a)$ είναι το αντίστοιχο ποσοστιαίο σημείο (95^{th} ή 99^{th}) της εκάστοτε κατανομής, και $\hat{\sigma}_{t+1|t}$ είναι η πρόβλεψη για τη δεσμευμένη τυπική απόκλιση στο χρόνο $t+1$ δοθείσας της πληροφόρησης μέχρι και το χρόνο t .

3.3. Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ BAYES

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της δομής του *Bayes* (σε σύγκριση με την κλασική ανάλυση) είναι η χρήση των πιθανοτήτων για την έκφραση και ερμηνεία της αβεβαιότητας. Δηλαδή, για τον προσδιορισμό ενός στοχαστικού μοντέλου αποτελούμενο από παρατηρούμενα δεδομένα Y και από ένα διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων θ , υποθέτει ότι οι παράμετροι θ είναι τυχαίες μεταβλητές. Η εξάρτηση των Y πάνω στις παραμέτρους θ προσδιορίζεται από τη μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $L(Y|\theta)$. Οι αντικειμενικές τιμές που αναμένουμε να έχουν οι παράμετροι πριν ελέγξουμε τα δεδομένα μας Y εκφράζονται από την προγενέστερη κατανομή πιθανοτήτων $\pi(\theta)$.

Ο πυρήνας του συμπεράσματος του Bayes είναι μια απλή και ιδιαίτερα σημαντική έκφραση, γνωστή ως ο *κανόνας του Bayes* :

$$p(\theta|Y) = \frac{L(Y|\theta)\pi(\theta)}{\int L(Y|\theta)\pi(\theta)d\theta} \quad (\text{II.43})$$

Παρατηρώντας έπειτα τα Y , η αρχική εικόνα για τις παραμέτρους θ ανανεώνεται από τη δεσμευμένη κατανομή των θ πάνω στα Y . Αυτή η κατανομή ονομάζεται εκ των υστέρων κατανομή των θ .

Σε πολλές περιπτώσεις, ο υπολογισμός της $p(\theta|Y)$ είναι αναλυτικά πολύ δύσκολος, σαν αποτέλεσμα αριθμητικές ή ασυμπτωτικές μέθοδοι είναι απαραίτητες. Οι *Miazhynshaiia* και *Ausserenegg* (2005) νιοθετούν τη στρατηγική *Markov chain Monte Carlo (MCMC)* ως εργαλείο για να υπολογίσουν τις εκ των υστέρων κατανομές. Η ιδέα βασίζεται στην κατασκευή μιας αμείωτης (*irreducible*) και μη-περιοδικής (*aperiodic*) αλυσίδας του *Markov* με υλοποιήσεις $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(t)}, \dots$ στον παραμετρικό χώρο, κατανομή ισορροπίας $p(\theta|Y)$ και μια μεταβατική πιθανότητα (*transition probability*) $K(\theta'', \theta') = \pi(\theta''|t+1) = \theta''/\theta^{(t)} = \theta'$, όπου τα θ' και θ'' είναι πραγματοποιημένες καταστάσεις στο χρόνο t και $t+1$ αντίστοιχα. Κάτω από τις κατάλληλες υποθέσεις κανονικότητας, το ασυμπτωτικό αποτέλεσμα εγγυάται ότι καθώς το $t \rightarrow \infty$, η παράμετρος $\theta^{(t)}$ τείνει σε μια κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής με πυκνότητα $p(\theta|Y)$.

Η πιο γνωστή διαδικασία *MCMC* είναι η δειγματοληψία *Gibbs*, όταν έχουμε πλήρως προσδιορισμένες δεσμευμένες κατανομές, και ο αλγόριθμος *Metropolis-Hastings (MH)* ο οποίος παρέχει μια πιο γενική δομή.

3.4. BOOTSTRAP ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

Σύμφωνα με τους *Miazhynshaiia* και *Ausserenegg* (2005) η τέταρτη μέθοδος για να υπολογίσουμε την αβεβαιότητα στην εκτίμηση των παραμέτρων είναι η *bootstrap* δειγματοληψία, μια μελέτη των *Pascual, Romo* και *Ruiz* (2000). Έχοντας εκτιμήσει τη μέγιστη πιθανοφάνεια των παραμέτρων του υποδείγματος, $\hat{\theta}^{ML} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$, οι δεσμευμένες διακυμάνσεις εκτιμώνται από μια διαδικασία *GARCH*:

$$\hat{h}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 (r_{t-1} - \hat{\mu}_{t-1})^2 + \hat{\beta}_1 \hat{h}_{t-1},$$

$$\hat{\mu}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 r_{t-1}$$

όπου $\hat{h}_t = \frac{\hat{\alpha}_0}{1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1}$ είναι η εκτιμώμενη μη-δεσμευμένη διακύμανση.

Τα τυποποιημένα κατάλοιπα υπολογίζονται ως εξής:

$$\hat{\varepsilon}_t = \frac{r_t - \hat{\mu}_t}{\sqrt{\hat{h}_t}},$$

Για να μιμηθεί τη δομή των πραγματικών σειρών, τα αποτελέσματα της μεθόδου bootstrap $\{r_1^*, r_2^*, \dots, r_N^*\}$ προκύπτουν από:

$$\begin{aligned} h_t^* &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 (r_{t-1}^* - \mu_{t-1}^*)^2 + \hat{\beta}_1 \hat{h}_{t-1}^*, \\ \mu_t^* &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 r_{t-1}^*, \\ r_t^* &= \mu_t^* + \sqrt{h_t^*} \cdot \varepsilon_t^*, \quad t = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{II.46}$$

όπου τα ε_t^* δίνονται τυχαία από την εμπειρική κατανομή των centered καταλοίπων

$\hat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon}_t$ και οι αρχικές τιμές είναι $h_1^* = \hat{h}_1$ και $\mu_1^* = mean(r_t)$.

Έχοντας δημιουργήσει ψευδο-σειρές των αποδόσεων $\{r_1^*, r_2^*, \dots, r_N^*\}$ μπορούμε να υπολογίσουμε την bootstrap MLE των $\hat{\theta}_{BS}^*$ πάνω σε αυτές τις σειρές. Αυτή η διαδικασία, που δημιουργεί ψευδο-σειρές των αποδόσεων και μετά εκτιμά τις παραμέτρους $\hat{\theta}_{BS}^*$, επαναλαμβάνεται μέχρι να δημιουργηθεί ένα επαρκώς μεγάλο δείγμα των εκτιμήσεων των παραμέτρων $\hat{\theta}_{BS}^*$.

Οι παραπάνω μέθοδοι εκτίμησης των υποδειγμάτων VaR μας δίνουν ολόκληρη την κατανομή των παραμέτρων, ενσωματώνοντας και την αβεβαιότητα στις εκτιμήσεις της VaR. Έστω M δείγματα των παραμέτρων $\{\theta^{(m)}\}_{m=1}^M$ από την κατανομή των παραμέτρων. Για κάθε m , όπου $m=1, \dots, M$, εκτιμούμε την κατανομή των

αποδόσεων σύμφωνα με το *GARCH* υπόδειγμα για μια περίοδο μπροστά. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το αντίστοιχο ποσοστιαίο σημείο αυτής της κατανομής, το οποίο παίρνουμε ως μέτρο υπολογισμού της *VaR*. Επαναλαμβάνοντας για κάθε m , παίρνουμε ένα δείγμα M αξιών για την εκτίμηση της *VaR* για κάθε μέρα. Με αυτόν τον τρόπο αντί να έχουμε μια εκτίμηση για την *VaR*, αποκτούμε ένα ολόκληρο δείγμα προβλέψεων για την *VaR* για κάθε μέρα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ

1. ΟΡΙΣΜΟΣ

Υπάρχει πληθώρα επιστημονικών ερευνών όσον αφορά στην εφαρμογή της θεωρίας των ακραίων τιμών. Ο Longin (2000) ήταν ένας από τους πρώτους ερευνητές. Ο Embrechts (2000) αναλύει τη θεωρία των ακραίων τιμών από τη χρηματοοικονομική σκοπιά, και επεκτείνει το υπόδειγμα της VaR αναλύοντας μη-κανονικές κατανομές για τις ουρές των κατανομών. Ο McNeil (1997, 1998 και 1999) μελετά τη δεσμευμένη θεωρία ακραίων τιμών. Οι Danielsson και de Vries (1997) χρησιμοποιούν μία ημι-παραμετρική προσέγγιση βασισμένη στον εκτιμητή του Hill για το δείκτη της ουράς (tail index). Οι Diebold, Schuermann και Stroughair (1998) παρουσιάζουν κάποιες παγίδες σχετικά με τις τεχνικές χρήσης της θεωρίας των ακραίων τιμών.

Οι μέθοδοι που βασίζονται στη θεωρία των ακραίων τιμών έχουν δύο χαρακτηριστικά που τις καθιστούν ελκυστικές για τον υπολογισμό της ουράς μιας κατανομής. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι πρώτον ότι βασίζονται σε μία βάσιμη στατιστική θεωρία και δεύτερον ότι προσφέρουν μια παραμετρική μορφή της ουράς μιας κατανομής. Για αυτό το λόγο αυτές οι μέθοδοι επιτρέπουν τον υπολογισμό πέραν από την κλίμακα των δεδομένων. Παρόλα αυτά, καμία από τις μεθόδους που βασίζονται στη θεωρία των ακραίων τιμών δε δίνουν υπολογισμούς της VaR που να αντανακλούν την τρέχουσα διακύμανση. Η ετεροσκεδαστικότητα, χαρακτηριστικό των περισσοτέρων χρηματοοικονομικών δεδομένων, τα οποία μοντελοποιούνται με επιτυχία από την οικογένεια υποδειγμάτων *ARCH/GARCH*, είναι το σημαντικότερο μειονέκτημα κάθε μορφής εκτιμητή της VaR.

Με στόχο να αντιμετωπίσουν τα μειονεκτήματα καθεμιάς από τις τρεις μεθόδους οι McNeil και Frey (2000) συνδυάζουν τις τρεις προσεγγίσεις. Χρησιμοποιούν μοντελοποίηση *GARCH* και εκτιμήσεις ψευδο-μεγίστης πιθανοφάνειας με σκοπό να υπολογίσουν τη δεσμευμένη διακύμανση. Στατιστικοί έλεγχοι και ανάλυση υπολογισμού των δεδομένων επιβεβαιώνουν ότι τα κατάλοιπα είναι, έστω και κατά προσέγγιση ισόνομα και ανεξάρτητα κατανεμημένα (*iid* σειρές) και έχουν παχιές ουρές. Χρησιμοποιούν τη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης (για το κεντρικό τμήμα της κατανομής) και μεθόδους με όριο (*threshold methods*) από τη θεωρία



ακραίων τιμών (*extreme value theory*) για τον υπολογισμό των καταλοίπων. Το γεγονός ότι τα κατάλοιπα είναι ανεξάρτητα στο χρόνο (κατά προσέγγιση) διευκολύνει την εφαρμογή των μεθόδων αυτών. Ο υπολογισμός της δεσμευμένης κατανομής των αποδόσεων γίνεται εύκολα μέσω της ήδη προσδιορισμένης κατανομής των καταλοίπων και τους υπολογισμούς του δεσμευμένου μέσου και της διακύμανσης. Αυτή η προσέγγιση αντανακλά δύο χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών, τη στοχαστική διακύμανση και τις παχιές ουρές των δεσμευμένων κατανομών των αποδόσεων σε βραχυχρόνιους ορίζοντες.

Αντίστοιχα οι *Barone-Adesi et al. (1998)* μοντελοποίησαν μια σειρά χρηματοοικονομικών αποδόσεων με ένα *GARCH* μοντέλο και χρησιμοποίησαν ιστορική προσομοίωση για να συνάγουν την κατανομή των καταλοίπων. Δεν χρησιμοποίησαν μοντέλα βασισμένα στη θεωρία των ακραίων τιμών για να εκτιμήσουν τις ουρές της κατανομής των καταλοίπων. Η προσέγγισή τους δίνει καλά αποτελέσματα σε μεγάλα δείγματα όπου τα εμπειρικά ποσοστιαία σημεία (*quantiles*) αποτελούν καλούς εκτιμητές των ποσοστιαίων σημείων των ουρών. Για μικρότερα δείγματα μέθοδοι με όριο (*threshold*) από τη θεωρία των ακραίων τιμών δίνουν καλύτερες εκτιμήσεις για τις ουρές των καταλοίπων.

2. ΜΕΘΟΔΟΙ

Έστω ότι X_t , όπου $t \in Z$, είναι μια αυστηρά στάσιμη χρονολογική σειρά που απεικονίζει ημερήσιες παρατηρήσεις αρνητικών λογαριθμικών αποδόσεων των τιμών ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος και ισχύει:

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t. \quad (\text{III.1})$$

Τα Z_t είναι μια διαδικασία αυστηρά λευκού θορύβου (κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα) με μέσο μηδέν, μοναδιαία διακύμανση και οριακή συνάρτηση κατανομής $F_z(z)$. Οι *McNeil και Frey (2000)* υποθέτουν ότι τα μ_t και σ_t είναι μετρήσιμα σε σχέση με το σύνολο πληροφόρησης για τη διαδικασία των αποδόσεων μέχρι και τη στιγμή $t-1$, I_{t-1} .

Έστω ότι $F_x(x)$ απεικονίζει την οριακή κατανομή των X_t και, έστω ότι για έναν ορίζοντα $h \in N$, $F_{X_{t+1} + \dots + X_{t+h}|I_t}(x)$ απεικονίζει την προβλέψιμη κατανομή των

αποδόσεων για τις επόμενες (πέραν των t ημερών) h ημέρες, δοθείσας όλης της πληροφόρησης για τις αποδόσεις μέχρι και την ημέρα t . Οι *McNeil* και *Frey* (2000) ενδιαφέρονται για την εκτίμηση των ποσοστιαίων σημείων στις ουρές των κατανομών. Για $0 < q < 1$, ένα μη-δεσμευμένο ποσοστιαίο σημείο είναι το ποσοστιαίο σημείο που δίνεται από την οριακή κατανομή:

$$x_q = \inf \{x \in R : F_X(x) \geq q\}, \quad (\text{III.2})$$

και ένα δεσμευμένο ποσοστιαίο σημείο είναι το ποσοστιαίο σημείο της προβλέψιμης κατανομής των αποδόσεων για τις επόμενες h ημέρες:

$$x'_q(h) = \inf \{x \in R : F_{X_{t+1} + \dots + X_{t+h|I_t}}(x) \geq q\}. \quad (\text{III.3})$$

Οι *McNeil* και *Frey* (2000) επικεντρώνουν το ενδιαφέρον τους στα ποσοστιαία σημεία (*quantiles*) για την ενός βήματος προβλέψιμη κατανομή, τα οποία απεικονίζουν ως x'_q .

Εφόσον ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} F_{X_{t+1|I_t}}(x) &= P\{\sigma_{t+1}Z_{t+1} + \mu_{t+1} \leq x | I_t\} \\ &= F_Z((x - \mu_{t+1})/\sigma_{t+1}), \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

η σχέση των x'_q απλοποιείται:

$$x'_q = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_q, \quad (\text{III.3})'$$

όπου z_q είναι το πάνω q ποσοστιαίο σημείο της οριακής κατανομής των Z_t τα οποία εξ υποθέσεως δεν εξαρτώνται από το χρόνο t .

Για να εφαρμοστεί η παραπάνω μεθοδολογία πρέπει να γίνει επιλογή υποδείγματος για το μέσο και τη διακύμανση. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στη βιβλιογραφία υπάρχει πληθώρα τέτοιων υποδειγμάτων με πιο γνωστά της οικογένεια

των *ARCH/GARCH* υποδειγμάτων (*Bollerslev et al.*, 1992), η διαδικασία *HARCH* (*Müller et al.*, 1997) και τα υποδείγματα στοχαστικής διακύμανσης (*Shephard*, 1996).

Για την εκτίμηση των x_q^t με υποδείγματα τύπου *GARCH* συχνά γίνεται η υπόθεση ότι η κατανομή τους είναι η τυποποιημένη κανονική κατανομή. Σαν αποτέλεσμα ένα ποσοστιαίο σημείο της κατανομής προσδιορίζεται από τη σχέση $z_q = \Phi^{-1}(q)$, όπου $\Phi(z)$ είναι η συνάρτηση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Ένα υπόδειγμα τύπου *GARCH* με αποδόσεις που κατανέμονται κανονικά μπορεί να εκτιμηθεί με τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας (*ML*) και τα μ_{t+1} και σ_{t+1} μπορούν να προκύψουν χρησιμοποιώντας τη διαδικασία πρόβλεψης ενός βήματος, ώστε μία εκτίμηση των x_q^t γίνεται εύκολα χρησιμοποιώντας τη σχέση (III.3)'. Αυτή η προσέγγιση είναι πολύ κοντά με την προσέγγιση του *RiskMetrics* (*RiskMetrics*, 1995). Από την ανάλυση-εφαρμογή των *McNeil* και *Frey* (2000) προκύπτει ότι αυτή η προσέγγιση συχνά υποεκτιμά το δεσμευμένο ποσοστιαίο σημείο για $q > 0.95$. Παρόλο που είναι ικανή να αντιμετωπίζει το *volatility clustering* και να καθιστά τα δεδομένα προσεγγιστικά ισόνομα και ανεξάρτητα κατανεμημένα (*iid*), στις περισσότερες περιπτώσεις οδηγεί σε μη ορθή εξειδίκευση των χρηματοοικονομικών αποδόσεων (ημερήσιες ή με μεγαλύτερη συχνότητα). Δηλαδή η κατανομή των αποδόσεων φαίνεται να έχει πιο παχιές ουρές από την κανονική, να είναι πιο λεπτόκυρτη.

Η μη ορθή εξειδίκευση μπορεί κατά ένα μέρος να διορθωθεί χρησιμοποιώντας ασύμμετρη ή με παχιές ουρές κατανομή (αντί της κανονικής), όπως η *t-student*. Η χρήση μιας τέτοιας κατανομής αναμένεται να οδηγήσει σε πιο ακριβείς εκτιμήσεις των παραμέτρων των υποδειγμάτων *AR* και *GARCH*, και σαν αποτέλεσμα σε μεγαλύτερη ακρίβεια στις εκτιμήσεις της διακύμανσης, $\hat{\sigma}_t^2$, και των προβλέψεων αυτής, $\hat{\sigma}_{t+h}^2$. Μια εναλλακτική, λοιπόν, προσέγγιση της υπόθεσης για κανονικότητα στην κατανομή των αποδόσεων, αφορά στην υπόθεση ότι οι αποδόσεις έχουν μία λεπτόκυρτη κατανομή, όπως η *t-student*. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι $Z = \sqrt{(\nu - 2)/\nu} T$ (T κατανέμεται σύμφωνα με τη *t-student* με βαθμούς ελευθερίας $\nu > 2$) με συνάρτηση κατανομής $F_T(t)$. Τότε προκύπτει ότι $z_q = \sqrt{(\nu - 2)/\nu} F_T^{-1}(q)$. Τα υποδείγματα τύπου *GARCH* όπου γίνεται η υπόθεση ότι οι αποδόσεις κατανέμονται



σύμφωνα με τη t-student κατανομή, μπορούν να εκτιμηθούν με τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας καθώς επίσης μπορεί να εκτιμηθεί και η παράμετρος ν .

Οι *Bollerslev* και *Wooldridge* (1992) έδειξαν ότι εάν ο δεσμευμένος μέσος και η διακύμανση είναι κατάλληλα εξειδικευμένα, τότε οι εκτιμήσεις του δεσμευμένου μέσου και της διακύμανσης μπορούν να γίνουν με συνέπεια μέσω της μεθόδου της μεγίστης πιθανοφάνειας κάτω από υποθέσεις κανονικότητας (*pseudo-maximum likelihood*), ακόμα και αν τα δεδομένα (*innovations*) δεν είναι κανονικά κατανεμημένα. Επειδή η κατάλληλη εξειδίκευση της διακύμανσης είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί για τις πραγματικές σειρές των αποδόσεων, δεν είναι ξεκάθαρο ποια εξειδίκευση είναι η βέλτιστη, και για αυτό το λόγο η απόφαση θα πρέπει να βασιστεί στην επίδοση της προβλεψιμότητας της εκτός δείγματος VaR.

Στη μέθοδο που εφαρμόζουν οι *McNeil* και *Frey* (2000) γίνονται ελάχιστες υποθέσεις για την κατανομή των αποδόσεων και το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στη μοντελοποίηση των ουρών της κατανομής χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ακραίων τιμών. Επίσης χρησιμοποιούν την προσέγγιση δύο σταδίων η οποία συνοψίζεται ως εξής:

- Μοντελοποιούν τις αποδόσεις με ένα υπόδειγμα τύπου *GARCH* χωρίς να κάνουν καμία υπόθεση για τη $F_z(z)$ και χρησιμοποιούν την προσέγγιση της ψευδο-μεγίστης πιθανοφάνειας (*pseudo-maximum-likelihood-method - PML*). Εκτιμούν τα μ_{t+1} και σ_{t+1} χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα που έχει επιλεγεί και υπολογίζουν τα κατάλοιπα (*implied model residuals*).
- Θεωρούν ότι τα κατάλοιπα είναι μία διαδικασία αυστηρού λευκού θορύβου και χρησιμοποιούν τη θεωρία των ακραίων τιμών (*EVT*) για να μοντελοποιήσουν την ουρά της $F_z(z)$. Και τέλος, χρησιμοποιούν το εκτιμημένο υπόδειγμα για να εκτιμήσουν το z_q για $q > 0.95$.

Πιο αναλυτικά:

2.1. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ μ_{t+1} ΚΑΙ σ_{t+1} ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ PML

Για λόγους πρόβλεψης, οι *McNeil* και *Frey* (2000), θέτουν μία σταθερή μνήμη n ώστε στο τέλος της ημέρας t τα δεδομένα να αποτελούνται από τις τελευταίες n αρνητικές λογαριθμικές αποδόσεις $(x_{t-n+1}, \dots, x_{t-1}, x_t)$. Θεωρούν ότι τα x_i προέρχονται



από μια διαδικασία $AR(1)$ - $GARCH(1,1)$. Σαν αποτέλεσμα, η δεσμευμένη διακύμανση των αποδόσεων σε αποκλίσεις από το μέσο τους, $\varepsilon_t = X_t - \mu_t$, δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (\text{III.5})$$

όπου $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$ και $\beta > 0$. Ο δεσμευμένος μέσος δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_t = \phi X_{t-1}. \quad (\text{III.6})$$

Αυτό το υπόδειγμα είναι μία ειδική περίπτωση της γενικευμένης διαδικασίας 1^{st} βαθμού στοχαστικής διακύμανσης, διατυπωμένη από τον Duan (1997), ο οποίος χρησιμοποιεί ένα αποτέλεσμα από τον Brandt (1986) για να θέσει τις υποθέσεις για την αυστηρή στασιμότητα. Η χρονολογική σειρά των αποδόσεων σε αποκλίσεις από το μέσο τους, $\varepsilon_t = X_t - \mu_t$, είναι αυστηρά στάσιμη εάν ισχύει:

$$E[\log(\beta + \alpha_1 Z_{t-1}^2)] < 0. \quad (\text{III.7})$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Jensen και την κυρτότητα του $-\log(x)$ αποδεικνύεται ότι μία επαρκής συνθήκη για τη σχέση (III.7) είναι $\beta + \alpha_1 < 1$, κάτι που επιπλέον διαβεβαιώνει ότι η οριακή συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ έχει πεπερασμένη τη δεύτερη της ροπή.

Αυτό το υπόδειγμα εκτιμάται μέσω της μεθόδου ψευδο-μεγίστης πιθανοφάνειας (*pseudo-maximum-likelihood- PML*). Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα για το υπόδειγμα $GARCH(1,1)$ με κανονικές αποδόσεις μεγιστοποιείται για να προκύψουν οι εκτιμητές των παραμέτρων, $\hat{\theta} = (\hat{\phi}, \hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta})^\top$. Στην πραγματικότητα, αποδεικνύεται ότι η μέθοδος *PML* δίνει συνεπείς και ασυμπτωτικά κανονικούς εκτιμητές (Gouriéroux, 1997).

Οι εκτιμήσεις των χρονολογικών σειρών του δεσμευμένου μέσου $(\hat{\mu}_{t-n+1}, \dots, \hat{\mu}_t)$ και της δεσμευμένης τυπικής απόκλισης $(\hat{\sigma}_{t-n+1}, \dots, \hat{\sigma}_t)$, μπορούν να υπολογιστούν από σχέσεις (III.5) και (III.6) αφού γίνουν αντικαταστάσεις των λογικών αρχικών τιμών (*sensible starting values*).

Τα κατάλοιπα υπολογίζονται για δύο λόγους, για να ελεγχθεί η επάρκεια του υποδείγματος *GARCH* και δεύτερον για να χρησιμοποιηθούν στο δεύτερο στάδιο. Οι *McNeil* και *Frey* (2000) τα υπολογίζουν ως:

$$(z_{t-n+1}, \dots, z_t) = \left(\frac{x_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1}}{\hat{\sigma}_{t-n+1}}, \dots, \frac{x_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t} \right). \quad (\text{III.8})$$

Τα κατάλοιπα πρέπει να είναι ισόνομα και ανεξάρτητα κατανευμημένα. Εάν το υπόδειγμα που έχουν επιλέξει ταιριάζει στα δεδομένα (έλεγχος μέσω των γραφημάτων αυτοσυσχέτισης και του ελέγχου *Ljung-Box*) ολοκληρώνουν το πρώτο στάδιο υπολογίζοντας της εκτιμήσεις για το δεσμευμένο μέσο και τη διακύμανση για το χρόνο $t+1$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{t+1} &= \hat{\phi} x_t, \\ \hat{\sigma}_{t+1}^2 &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{\varepsilon}_t^2 + \hat{\beta} \hat{\sigma}_t^2, \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

όπου $\hat{\varepsilon}_t = \hat{x}_t - \hat{\mu}_t$.

2.2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ z_q ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ (EVT)

Οι *McNeil* και *Frey* (2000) ξεκινώντας το δεύτερο στάδιο κάνουν ένα *QQ-plot* των καταλοίπων ώστε να δείξουν ότι η υπόθεση δεσμευμένης κανονικότητας των αποδόσεων δεν είναι βάσιμη. Στη συνέχεια θέτουν ένα υψηλό όριο (*threshold*), u , και υποθέτουν ότι τα κατάλοιπα που υπερβαίνουν το όριο κατανέμονται σύμφωνα με τη γενικευμένη *Pareto* κατανομή (*GPD*) με συνάρτηση κατανομής:

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi y / \beta)^{-1/\xi} & \text{if } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-y / \beta) & \text{if } \xi = 0 \end{cases}, \quad (\text{III.10})$$

όπου $\beta > 0$, και $\begin{cases} y \geq 0 & \text{if } \xi \geq 0 \\ 0 \leq y \leq -\beta / \xi & \text{if } \xi < 0 \end{cases}$.

Έστω μία γενική συνάρτηση κατανομής F και η αντίστοιχη υπερβάλλουσα κατανομή πέραν του ορίου (*threshold*), u , δίνεται από:

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)} , \quad (\text{III.11})$$

για $0 \leq y < x_0 - u$, όπου x_0 είναι το πεπερασμένο ή μη-πεπερασμένο άκρο της F .

Οι Balkema και de Haan (1974) και o Pickands (1975) έδειξαν ότι για μία μεγάλη κατηγορία κατανομών F είναι πιθανόν να βρεις μία θετική μετρήσιμη συνάρτηση $\beta(u)$ τέτοια ώστε:

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{0 \leq y < x_0 - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0 . \quad (\text{III.12})$$

Στην κατηγορία των κατανομών για τις οποίες ισχύει το παραπάνω αποτέλεσμα είναι όλες οι συνεχείς κατανομές της στατιστικής. Αυτές μπορούν να χωριστούν σε τρείς κατηγορίες σύμφωνα με την αξία της παραμέτρου ξ στην οριακή προσέγγιση της γενικευμένης Pareto κατανομής για την υπερβάλλουσα κατανομή:

- i. $\xi > 0$, αντιστοιχεί σε κατανομές με παχιές ουρές, των οποίων οι ουρές μικραίνουν όπως οι δυναμικές συναρτήσεις (*power functions*). Τέτοιες μπορούν να είναι οι κατανομές Pareto, *t-student*, *Cauchy*, *Burr*, *loggamma* και *Fréchet*.
- ii. $\xi = 0$, αντιστοιχεί σε κατανομές όπως, η κανονική, η εκθετική, η γάμμα και η *lognormal*, των οποίων οι ουρές πέφτουν εκθετικά.
- iii. $\xi < 0$, αντιστοιχεί σε κατανομές με κοντές ουρές (*short-tailed*) με πεπερασμένα άκρα όπως, η ομοιόμορφη (*uniform*) και η βήτα (*beta*) κατανομή.

Οι McNeil και Frey (2000) υποθέτουν ότι η υπό εξέταση κατανομή ξεκινά στο ορίο (*threshold*) u . Από το δείγμα τους των n σημείων-μονάδων ένας τυχαίος αριθμός $N = N_u > 0$ θα υπερβαίνει αυτό το άριθμο. Υποθέτοντας ότι το σύνολο των N τυχαίων αριθμών που υπερβαίνουν το άριθμο κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα σύμφωνα με την γενικευμένη Pareto κατανομή, ο Smith (1987) έδειξε ότι οι εκτιμήσεις της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας (*ML*), $\hat{\xi} = \hat{\xi}_N$ και $\hat{\beta} = \hat{\beta}_N$, των παραμέτρων της *GPD*, ξ και β , είναι συνεπείς και ασυμπτωτικά κανονικές καθώς $N \rightarrow \infty$, δοθέντος ότι $\xi > -1/2$. Κάτω και από την πιο αδύναμη υπόθεση ότι το σύνολο των N

τυχαίων αριθμών που υπερβαίνουν το όριο κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα από την $F_u(y)$, η οποία είναι προσεγγιστικά *GPD*, ο *Smith (1987)* παίρνει ασυμπτωτικά κανονικά αποτελέσματα για τα $\hat{\xi}$ και $\hat{\beta}$. Θέτοντας $u = u_n \rightarrow x_0$ και $N = N_u \rightarrow \infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$, έδειξε ότι η διαδικασία είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη, δεδομένου ότι $u \rightarrow x_o$ επαρκώς γρήγορα. Η απαραίτητη ταχύτητα εξαρτάται από το ρυθμό που η σχέση (III.12) συγκλίνει. Οι *McNeil και Frey (2000)* επιλέγουν ένα υψηλό όριο, u , ώστε να περιορίσουν την πιθανότητα μεροληψίας καθώς κρατούν το N μεγάλο για να ελέγχουν τη διακύμανση των εκτιμήσεων των παραμέτρων.

Στη συνέχεια οι *McNeil και Frey (2000)* θεωρούν την ακόλουθη ισότητα για τα σημεία-μονάδες, $x > u$, στην ουρά της F :

$$1 - F(x) = (1 - F(u))(1 - F_u(x - u)). \quad (\text{III.13})$$

Εκτιμώντας τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος της σχέσης (III.13), χρησιμοποιώντας την τυχαία αναλογία των δεδομένων στην ουρά της κατανομής, N/n , και εκτιμώντας τον δεύτερο όρο με τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας, προσεγγίζοντας την υπερβάλλουσα κατανομή με τη γενικευμένη *Pareto* κατανομή, προκύπτει ο εκτιμητής της ουράς:

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N}{n} \left(1 + \hat{\xi} \frac{x - u}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\hat{\xi}}, \quad \text{για } x > u. \quad (\text{III.14})$$

Ο *Smith (1987)* μελέτησε και το ασυμπτωτικό σχετικό σφάλμα του παραπάνω εκτιμητή και είχε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$N^{1/2} \left(\frac{1 - \hat{F}(x)}{1 - F(x)} - 1 \right) \xrightarrow{d} N(0, \nu^2), \quad (\text{III.15})$$

καθώς $u = u_n \rightarrow x_0$ και $N = N_u \rightarrow \infty$, όπου η ασυμπτωτική αμερόληψία απαιτεί ξανά ότι $u \rightarrow x_o$ επαρκώς γρήγορα.

Στην πράξη οι *McNeil* και *Frey* (2000) τροποποιούν λίγο τη μεθοδολογία και θέτουν τον αριθμό των δεδομένων της ουράς να είναι $N = k$ όπου $k \ll n$. Και εφαρμόζοντάς το οδηγούνται στα εξής συμπεράσματα:

- i. Η κανονική κατανομή υποεκτιμά την έκταση των μεγάλων απωλειών και επίσης των μεγάλων κερδών.
- ii. Η κατανομή *t-student*, από την άλλη πλευρά, υποεκτιμά τις απώλειες και υπερεκτιμά τα κέρδη.

Τα παραπάνω συμπεράσματα φανερώνουν τα μειονεκτήματα χρήσης μίας συμμετρικής κατανομής με δεδομένα που είναι μη-συμμετρικά στις ουρές.

Με πιο συμμετρικά δεδομένα η δεσμευμένη *t-student* κατανομή μπορεί να δουλέψει αρκετά καλά. Όπως αναφέρουμε πιο πάνω, η *t-student* κατανομή είναι ένα παράδειγμα κατανομής με παχιές ουρές (κατανομή της οποίας η οριακή υπερβάλλουσα κατανομή είναι *GPD* με $\xi > 0$). Ο *Gnedenko* (1943) υποστηρίζει ότι όλες αυτές οι κατανομές έχουν ουρές της μορφής:

$$1 - F(x) = x^{-1/\xi} L(x), \quad (\text{III.16})$$

όπου $L(x)$ είναι μία αργά διαφοροποιήσιμη (*slowly varying*) συνάρτηση και ξ είναι η θετική παράμετρος της οριακής γενικευμένης *Pareto* κατανομής (*GPD*). $1/\xi$ είναι γνωστό και ως δείκτης ουράς (*tail index*) της F . Για την κατανομή *t-student* με n βαθμούς ελευθερίας η ουρά αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$1 - F(x) \sim \frac{\nu^{(\nu-2)/2}}{B(1/2, \nu/2)} x^{-\nu}, \quad (\text{III.17})$$

όπου $B(a, b)$ απεικονίζει τη συνάρτηση βήτα, τέτοια ώστε να αποτελεί ένα πολύ απλό παράδειγμα μιας συμμετρικής κατανομής αυτής της κατηγορίας, και η αξία του ξ στην οριακή κατανομή *GPD* είναι το αντίστροφό των βαθμών ελευθερίας (βλ. *McNeil* και *Saladin*, 1997).

Η μοντελοποίηση *t innovations* με ένα υπόδειγμα *GARCH* αντιστοιχεί στην εκτίμηση της παραμέτρου ξ του εκτιμητή της ουράς της γενικευμένης *Pareto* κατανομής. Ο έλεγχος της μορφής της πιθανότητας της *t-student* κατανομής φανερώνει ότι η εκτίμηση του ν θα είναι ευαίσθητη κυρίως σε μεγάλα δείγματα. Σαν

αποτέλεσμα, δεν προκαλεί έκπληξη ότι η μέθοδος μοντελοποιεί αρκετά καλά τις ουρές, παρόλο που χρησιμοποιούνται όλα τα δεδομένα στη διαδικασία εκτίμησης. Η μέθοδος που παρουσιάζουν οι *McNeil και Frey (2000)* έχει το πλεονέκτημα ότι δίνει ένα ξεκάθαρο υπόδειγμα για κάθε ουρά.

Επιπλέον οι *McNeil και Frey (2000)* χρησιμοποιούν τον εκτιμητή της ουράς της γενικευμένης *Pareto* κατανομής, σχέση (III.14), για να εκτιμήσουν τη δεξιά ουρά της κατανομής των αρνητικών αποδόσεων $F_X(x)$, εφαρμόζοντάς το άμεσα στα δεδομένα των αποδόσεων x_{t-n+1}, \dots, x_t . Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζουν ένα μη-δεσμευμένο ποσοστιαίο σημείο, \hat{x}_q , χρησιμοποιώντας τη μη-δεσμευμένη θεωρία ακραίων τιμών.

Οι *Embrechts et al. (1997)* κατασκευάζουν μια αυτοπαλίνδρομη διαδικασία 1^{ου} βαθμού, *AR(1)*, με κατάλοιπα που είναι συμμετρικά, με παχές ουρές και ισόνομα και ανεξάρτητα κατανεμημένα (*iid*), τέτοια ώστε και η κατανομή των καταλοίπων (*noise*) και η οριακή κατανομή της διαδικασίας να έχουν τον ίδιο δείκτη ουράς (*tail index*). Εφαρμόζουν τον εκτιμητή *Hill* στα προσομοιωμένα δεδομένα της διαδικασίας και επίσης στα κατάλοιπα που αποκτώνται έπειτα από τη μοντελοποίηση των δεδομένων με ένα *AR(1)* υπόδειγμα. Διαπιστώνουν ότι οι εκτιμήσεις του δείκτη των ουρών είναι πιο ακριβείς και σταθερές για τα κατάλοιπα, παρόλο που ο εκτιμητής *Hill* είναι θεωρητικά συνεπής και για τις δύο περιπτώσεις.

Αντίστοιχα με τους *McNeil και Frey (2000)*, και οι *Kuester, Mittnik και Paolella (2006)*, παρουσιάζοντας τη θεωρία των ακραίων τιμών, υποθέτουν ότι $\{X_t\}_{t=1}^T$ είναι μια αλληλουχία ισόνομα και ανεξάρτητα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών, και $M_T = \max(X_1, X_2, \dots, X_T)$. Εάν υπάρχουν τυποποιημένες σταθερές (*norming constants*) $c_T > 0$ και $d_T \in R$ και κάποια μη-εκφυλισμένη συνάρτηση κατανομής H τέτοια ώστε:

$$\frac{M_T - d_T}{c_T} \xrightarrow{d} H, \quad (\text{III.18})$$

τότε, για $1 + \xi > 0$,

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1+\xi x\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right\}, & \text{if } \xi \neq 0 \\ \exp\{-\exp\{-x\}\}, & \text{if } \xi = 0 \end{cases}, \quad (\text{III.19})$$

όπου η H_ξ ονομάζεται γενικευμένη κατανομή ακραίων τιμών (*generalized extreme value- GEV distribution*). Με άλλα λόγια, υπάρχει μία και μόνο μία πιθανή οικογένεια οριακών κατανομών για *sample maxima*. Η τυχαία μεταβλητή X , με συνάρτηση κατανομής F , ανήκει στο μέγιστο χώρο προσέλκυσης μιας κατανομής ακραίων τιμών, εν συντομίᾳ, $F \in MDA(H_\xi)$.

Η παράμετρος ξ είναι πολύ σημαντική γιατί καθοδηγεί τη συμπεριφορά των ουρών της $F(x)$. Οι κατανομές $F \in MDA(H_\xi)$ έχουν παχιές ουρές για $\xi > 0$, και περιλαμβάνουν την *Pareto* κατανομή (*inter alia*) και τις σταθερές *Paretoian* κατανομές. Για $\xi = 0$, η ουρά μειώνεται με εικθετικό ρυθμό, όπως στην περίπτωση της κανονικής κατανομής. Τέλος, οι κατανομές με $\xi < 0$, έχουν ένα πεπερασμένο σημείο στη δεξιά ουρά της κατανομής. Στην πραγματικότητα, η $MDA(H_\xi)$ περιλαμβάνει όλες τις κοινές συνεχείς κατανομές που εμφανίζονται στις εφαρμοσμένες στατιστικές μελέτες.

Έστω τώρα η συνάρτηση κατανομής της διαφοράς των ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών και ενός υψηλού, δεδομένου ορίου (*threshold*), $Y = X - u$:

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u), \quad y \geq 0. \quad (\text{III.20})$$

Για τις περιπτώσεις υπερβάλλουσων διαφορών πέραν του ορίου (*threshold*), ένα αποτέλεσμα κλειδί, που οφείλεται στον *Pickands* (1975), είναι ότι η γενικευμένη *Pareto* κατανομή (εν συντομίᾳ, *GPD*) είναι:

$$G_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{if } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\beta}}, & \text{if } \xi = 0 \end{cases}, \quad (\text{III.21})$$

και

$$\begin{aligned} y \geq 0, & \quad \text{if } \xi \geq 0 \\ 0 \leq y \leq -\beta/\xi, & \quad \text{if } \xi < 0 \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

και η παράμετρος κλίμακα, β , προκύπτει ως η οριακή κατανομή των κλιμακούμενων διαφορών των ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών από τα υψηλότερα όρια (*thresholds*).

Σύμφωνα με τους *Kuester, Mittnik και Paolella (2006)*, υπάρχουν δύο παραλλαγές όσον αφορά στην παραπάνω μέθοδο. Η πρώτη υποθέτει το χαρακτηριστικό των παχιών ουρών στα δεδομένα και κάνει χρήση ενός εκτιμητή ως ένδειξη για την ουρά της κατανομής (βλ. *Danielsson και de Vries, 2000*). Οι *Kuester, Mittnik και Paolella (2006)*, δίνουν προσοχή στη δεύτερη και πιο γενικευμένη παραλλαγή, η οποία κάνει χρήση του οριακού αποτελέσματος για κορυφές (*peaks*) πέραν των ορίων (*thresholds*) -POT της σχέσης (III.16) και δεν περιορίζεται στο χαρακτηριστικό των παχιών ουρών της κατανομής των δεδομένων.

Έστω ότι $\{X_t\}_{t=1}^T$ είναι μια αλληλουχία ισόνομα και ανεξάρτητα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών με συνάρτηση κατανομής $F \in MDA(H_\xi)$. Τότε για ένα συγκεκριμένο όριο $u = X_{k+1,T}$, που προκύπτει από μία στατιστική βαθμού $(k+1)$ ορίζουμε ότι:

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad y \geq 0, \quad (\text{III.23})$$

το οποίο μπορούμε να ξαναγράψουμε ως:

$$\bar{F}(u+y) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(y) \quad (\text{III.24})$$

Στη σχέση (III.24), η $\bar{F}(u)$ μπορεί να εκτιμηθεί από την αντίστοιχή της εμπειρική σχέση, $\bar{F}_T(u) = k/T$, όπου $F_T(u)$ είναι η εμπειρική συνάρτηση κατανομής των X . Στην περίπτωση που έχουμε ένα αρκετά υψηλό όριο (*threshold*) ισχύει:

$$\bar{F}_u(y) \approx 1 - G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}(u)}(y), \quad (\text{III.25})$$

έτσι ώστε, δοθείσες οι εκτιμήσεις $\hat{\xi}$ και $\hat{\beta}$, το $1 - G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(y)$ αποτελεί μία εκτίμηση για το $\bar{F}_u(y)$. Με αυτόν τον τρόπο, η πιθανότητα της ουράς (*tail probability*) για $X > u$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\hat{F}(x) = \frac{k}{T} \left(1 + \hat{\xi} \frac{x - u}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\hat{\xi}}. \quad (\text{III.26})$$

Ο εκτιμητής του ποσοστιαίου σημείου (*quantile estimator*), $F(x_p) > 1 - k/T$, προκύπτει αν αντιστρέψουμε τη σχέση (III.26),

$$\hat{x}_{p,k} = X_{k+1,T} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{1-p}{k/T} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right), \quad (\text{III.27})$$

όπου $u = X_{k+1,T}$. Επιλέγοντας το u πολύ υψηλό οδηγεί σε πολύ λίγες υπερβάσεις (*exceedances*) και σαν αποτέλεσμα σε υψηλή διακύμανση για τον εκτιμητή, ενώ χαμηλές τιμές στο όριο μπορεί να οδηγήσει σε μεροληψία καθώς η σχέση (III.25) δουλεύει καλά μόνο για τις ουρές μιας κατανομής.

Παρόλο που η μέθοδος της θεωρίας των ακραίων τιμών είναι πολύ καλή υποψήφια για τη μοντελοποίηση της *VaR*, η υπόθεσή της για ανεξάρτητη και ισόνομη κατανομή των αποδόσεων, δεν αποτελεί χαρακτηριστικό που εμφανίζουν οι πραγματικές αποδόσεις των χρηματοοικονομικών στοιχείων. Οι *Diebold, Schuermann και Stroughair (1998)* προτείνουν τη μοντελοποίηση όλων των δεδομένων μέσω ενός υποδείγματος με μεταβλητή διακύμανση στο χρόνο και έπειτα την εκτίμηση της ουράς των φιλτραρισμένων ή τυποποιημένων καταλοίπων, $z_t = (r_t - \mu_t)/\sigma_t$, με ένα υπόδειγμα της θεωρίας των ακραίων τιμών. Αυτό οδηγεί σε μια εκτίμηση για το τυποποιημένο ποσοστιαίο σημείο, $Q_\lambda(z)$, της μορφής:

$$VaR_{t+h}^\lambda Q := -Q_\lambda(r_{t+h} | F_t) = -\inf_x \{x \in R : P(r_{t+h} \leq x | F_t) \geq \lambda\}, \quad (\text{III.28})$$

όπου $0 < \lambda < 1$

και σαν αποτέλεσμα, μια εκτίμηση για τη VaR :

$$VaR_t = -(\mu_t + \sigma_t Q_\lambda(z)). \quad (\text{III.29})$$

Έχοντας κάνει μια σωστή εξειδίκευση του υποδείγματος, τα κατάλοιπα θα είναι προσεγγιστικά ισόνομα και ανεξάρτητα κατανεμημένα (*iid*), όπως ισχύει και στην υπόθεση της θεωρίας των ακραίων τιμών.

2.3. ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Οι *McNeil* και *Frey* (2000) για να ερευνήσουν για την επιλογή του ορίου (στη συγκεκριμένη περίπτωση επιλογή του k) πραγματοποιούν μία μελέτη προσομοίωσης. Επιπλέον χρησιμοποιούν αυτή τη μελέτη για να συγκρίνουν την προσέγγιση της γενικευμένης *Pareto* κατανομής (*GPD*) για την εκτίμηση των ουρών με την προσέγγιση που βασίζεται στον εκτιμητή του *Hill* και με την προσέγγιση που βασίζεται στην εμπειρική συνάρτηση κατανομής (ιστορική προσομοίωση).

Ο εκτιμητής του *Hill* (*Hill*, 1975) είναι σχεδιασμένος για δεδομένα κατανομών με παχιές ουρές, που απεικονίζονται από τη σχέση (III.16) με $\zeta > 0$. Ο εκτιμητής του ζ , βασισμένος σε k υπερβάσεις (*exceedances*) της στατιστικής βαθμού $(k+1)$ είναι:

$$\hat{\xi}^{(H)} = \hat{\xi}_k^{(H)} = k^{-1} \sum_{j=1}^k \log z_{(j)} - \log z_{(k+1)}, \quad (\text{III.30})$$

και ο εκτιμητής του ποσοστιαίου σημείου είναι:

$$\hat{z}_q^{(H)} = \hat{z}_{q,k}^{(H)} = z_{(k+1)} \left(\frac{1-q}{k/n} \right)^{-\hat{\xi}^{(H)}}. \quad (\text{III.31})$$

Για κάθε εκτιμητή $(\hat{\xi}_k, \hat{z}_{q,k}, \hat{\xi}_k^{(H)}, \hat{z}_{q,k}^{(H)})$ υπολογίζουν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (*MSE*) και τη μεροληψία χρησιμοποιώντας *Monte Carlo* εκτιμήσεις βασισμένες σε ανεξάρτητα δείγματα. Για παράδειγμα εκτιμούν:

$$\hat{MSE}(\hat{z}_{q,k}) = \sum_{j=1}^n (\hat{z}_{q,k}^{(j)} - z_q)^2, \quad (\text{III.32})$$

όπου $\hat{z}_{q,k}^{(j)}$ απεικονίζει την εκτίμηση του ποσοστιαίου σημείου από το δείγμα j .

Παρόλο που ο εκτιμητής του *Hill* είναι ο πιο αποτελεσματικός εκτιμητής του ξ (δίνει το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) για λογικά επιλεγμένο k) δεν παρέχει τον πιο αποτελεσματικό ούτε τον πιο σταθερό εκτιμητή ποσοστιαίου σημείου. Οι προσομοιώσεις των *McNeil* και *Frey* (2000) φανερώνουν ότι η μέθοδος *GPD* πρέπει να προτιμάται για την εκτίμηση υψηλών ποσοστιαίων σημείων.

2.4. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ (QUANTILE REGRESSION M APPROACH)

Μέσα από τον ορισμό της, η *VaR*, συνδέεται αυτόμata με την ιδέα της παλινδρόμησης του ποσοστιαίου σημείου. Για την εκτίμηση των ποσοστιαίων σημείων γίνεται χρήση, μέσω των χρονολογικών σειρών που τα εξειδικεύουν, κάθε πληροφορίας σχετικής με αυτά. Δεν χρειάζεται να γίνει οποιαδήποτε υπόθεση για την κατανομή των χρονολογικών σειρών των αποδόσεων. Η βασική ιδέα είναι η μοντελοποίηση του δεσμευμένου λ -ποσοστιαίου σημείου, $Q_\lambda(r_t | X_t) = -VaR_t$, ως συνάρτηση της πληροφορίας $X_t \in F_{t-1}$:

$$VaR_t = -g_\lambda(X_t; \beta_\lambda), \quad (\text{III.33})$$

όπου $g(\cdot, \cdot)$ και το διάνυσμα της παραμέτρου β εξαρτώνται από το λ . Οι *Koenker* και *Bassett* (1978) γενίκευσαν την κοινή γραμμική δομή παλινδρόμησης μετακινώντας το ενδιαφέρον από το δεσμευμένο μέσο στα δεσμευμένα ποσοστιαία σημεία. Οι *Koenker* και *Portnoy* (1997) υπολογίζουν, για παράδειγμα, το μη-δεσμευμένο λ -ποσοστιαίο σημείο του δείγματος, $\lambda \in (0,1)$, ως τη λύση της:

$$\min_{\beta \in R} \left\{ \sum_{r_t \geq \beta} \lambda |r_t - \beta| + \sum_{r_t < \beta} (1-\lambda) |r_t - \beta| \right\}. \quad (\text{III.34})$$

Επεκτείνοντας το παραπάνω, σε μία κλασσική δομή γραμμικής παλινδρόμησης, οι *Koenker* και *Bassett* (1978), όρισαν τον λ εκτιμητή της παλινδρόμησης του ποσοστιαίου σημείου ως:

$$\hat{\beta}(\lambda) = \arg \min_{\beta \in R^k} \left\{ \sum_{r_i \geq x'_i \beta} \lambda |r_i - x'_i \beta| + \sum_{r_i < x'_i \beta} (1-\lambda) |r_i - x'_i \beta| \right\}, \quad (\text{III.35})$$

όπου τα x_i είναι διανύσματα μη-τυχαίων μεταβλητών. Η υπόθεση-κλειδί στη γραμμική παλινδρόμηση ποσοστιαίου σημείου είναι η εξής: $r_i = x'_i \beta_\lambda + u_{i,\lambda}$. Πρέπει να σημειωθεί ότι η κατανομή των καταλούπων απροσδιόριστη από τα αριστερά (left unspecified). Η μόνη υπόθεση που γίνεται είναι ότι η συνάρτηση του δεσμευμένου ποσοστιαίου σημείου δίνεται από $Q_\lambda(r_i | x_i) = x'_i \beta_\lambda$, και κατά συνέπεια $Q_\lambda(u_{i,\lambda} | x_i) = 0$.

Οι *Engle* και *Manganelli* (2004) πρότειναν μια επέκταση της αντικειμενικής συνάρτησης για τη γενικευμένη, πιθανόν μη-γραμμική περίπτωση της σχέσης (III.33):

$$\min_{\beta \in R^k} \left\{ \sum_{r_i \geq VaR_i} \lambda |r_i + VaR_i| + \sum_{r_i < -VaR_i} (1-\lambda) |r_i + VaR_i| \right\} \quad (\text{III.36})$$

όπου σύμφωνα με τη σχέση (III.33), $VaR_i = -g_\lambda(x_i; \beta_\lambda)$ ή, στη γραμμική περίπτωση, $VaR_i = x'_i \beta_\lambda$.

Οι *Chernozhukov* και *Umantsev* (2001) χρησιμοποιούν την παλινδρόμηση του ποσοστιαίου σημείου για τη μοντελοποίηση της VaR , χωρίς να εξετάσουν την επίδοση του υποδείγματος σε όρους αλληλουχίας παραβίασης των υποθέσεων της VaR .

Οι *Kuester*, *Mittnik* και *Paoletta* (2006) επειδή ασχολούνται αποκλειστικά με την αποτελεσματικότητα της ενός βήματος (*one-step*) πρόβλεψης, χρησιμοποιούν την προσέγγιση της δεσμευμένης VaR , που διατυπώθηκε από τους *Engle* και *Manganelli* (2004). Οι *Engle* και *Manganelli* (2004) στην εξειδίκευση της σχέσης (III.33) συνδέουν τη VaR με τη δεσμευμένη τυπική απόκλιση των αποδόσεων, σαν αποτέλεσμα μία αύξηση των αποδόσεων οδηγεί σε μία πιο διασκορπισμένη κατανομή αυτών και *ceteris paribus*, σε μία υψηλότερη VaR . Στην εξειδίκευση της *CAViaR* συμπεριλαμβάνουν τη VaR_{t-1} , ως επεξηγηματική στη x_t , ώστε να προσαρμόσουν τη

σειριακή εξάρτηση της διακύμανσης και του μέσου. Επίσης, χρησιμοποιούν μια συνάρτηση των r_{t-1} ώστε να συνδέσουν το δεσμευμένο ποσοστιαίο σημείο με τις αποδόσεις.

Το υπόδειγμα «*baseline CAViaR*» δίνεται από:

$$VaR_t = VaR_{t-1} + \beta [I(r_{t-1} \leq -VaR_{t-1}) - \lambda]. \quad (\text{III.37})$$

Συνήθως θέτουμε τον εξής περιορισμό $\lambda \leq 0,05$, για λόγους διαχείρισης του κινδύνου, γεγονός που οδηγεί σε ένα μη-συμμετρικό αποτέλεσμα. Δηλαδή, η VaR_t θα αυξάνεται όταν πραγματοποιείται κάποια παραβίαση υπόθεσης, αλλιώς θα μειώνεται με αργό ρυθμό – δεδομένου ότι η εκ των προτέρων υπόθεση ότι $\beta > 0$ ισχύει. Στο υπόδειγμα «*baseline CAViaR*», η προσαρμοσμένη διαδικασία δε «μαθαίνει» κάτι από το πραγματικό μέγεθος των αποδόσεων (εκτός εάν ισχύει ή όχι ότι οι αποδόσεις είναι ευθυγραμμισμένες με τη VaR), όπως στην περίπτωση της εξειδίκευσης των συμμετρικών απόλυτων τιμών της *CAViaR*,

$$VaR_t = \beta_0 + \beta_1 VaR_{t-1} + \beta_2 |r_{t-1}|. \quad (\text{III.38})$$

Επιτρέπει στην αυτοπαλίνδρομη παράμετρο, β_1 , να διαφέρει από τη μονάδα, και οδηγεί σε άμεση ανταπόκριση του ποσοστιαίου σημείου στη διαδικασία των αποδόσεων, αντιμετωπίζοντας την επίπτωση των ακραίων αποδόσεων στη VaR - και έμμεσα στη διακύμανση, συμμετρικά. Η υπόθεση συμμετρίας «χαλαρώνει» στην ασύμμετρη κλίση της εξειδίκευσης της *CAViaR*,

$$VaR_t = \beta_0 + \beta_1 VaR_{t-1} + \beta_2 \max[r_{t-1}, 0] + \beta_3 \max[-r_{t-1}, 0]. \quad (\text{III.39})$$

Η παραπάνω σχέση επιτρέπει στην πρόβλεψη της VaR να ανταποκρίνεται μη-συμμετρικά στις θετικές και αρνητικές αποδόσεις, και επίσης αντιμετωπίζει το *leverage effect*. Η έμμεση διαδικασία *GARCH(1,1) CAViaR*,

$$VaR_t = (\beta_0 + \beta_1 VaR_{t-1}^2 + \beta_2 r_{t-1}^2)^{1/2}, \quad (\text{III.40})$$

προτεινόμενη από τους *Engle* και *Manganelli* (2004), είναι κατάλληλη εάν τα δεδομένα προέρχονται από ένα υπόδειγμα *location-scale* (III.3), με μία διαδικασία *GARCH(1,1)* για τη δεσμευμένη κλίμακα (*scale*), σ_t , και με την παράμετρο θέσης (*location*), μ_t , να ισούται με το μηδέν.

Μπορούμε να συμπεριλάβουμε στο υπόδειγμά μας το χαρακτηριστικό της αυτοσυσχέτισης των χρηματοοικονομικών αποδόσεων, επεκτείνοντας την δομή της *CAViaR*, επιτρέποντας στις αποδόσεις να έχουν μέσο μεταβαλλόμενο στο χρόνο της μορφής,

$$\mu_t = E(r_t | F_{t-1}). \quad (\text{III.41})$$

Ο μέσος μπορεί να μοντελοποιηθεί είτε μέσω παλινδρόμησης είτε μέσω των υποδειγμάτων *ARMA* ή *ARMAX*. Τότε μία έμμεση εξειδίκευση ενός υποδείγματος *GARCH(r,s)* με δεσμευμένο μέσο μ_t γράφεται,

$$\left(\frac{VaR_t + \mu_t}{z_\lambda} \right)^2 = c_0 + \sum_{i=0}^r c_i (r_{t-i} - \mu_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^s d_j \left(\frac{VaR_{t-j} + \mu_{t-j}}{z_\lambda} \right)^2. \quad (\text{III.42})$$

Το υπόδειγμα των *Engle* και *Manganelli* (2004) προκύπτει εάν θέσουμε $r = s = 1$ και $\mu_t = 0$ στο υπόδειγμα του έμμεσα δεσμευμένου μέσου *GARCH(r,s)* *CAViaR* των σχέσεων (III.41) και (III.42).

3. ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ GPD

- Σε πεπερασμένα δείγματα “*of the order of 1000 points*” από τυπικές κατανομές αποδόσεων οι εκτιμητές ποσοστιαίων σημείων της θεωρίας των ακραίων τιμών είναι πιο αποτελεσματικοί από αυτούς που προκύπτουν με τη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης.
- Ο εκτιμητής ποσοστιαίου σημείου που προκύπτει από τη μέθοδο *GPD* είναι πιο σταθερός (σε όρους μέσου τετραγωνικού σφάλματος- *MSE*) σε σχέση με την επιλογή των k από τον εκτιμητή του *Hill*.
- Για υψηλά ποσοστιαία σημεία με $q \geq 0.99$ η μέθοδος *GPD* είναι τουλάχιστον το ίδιο αποτελεσματική με τη μέθοδο του *Hill*.

- iv. Η μέθοδος *GPD* επιτρέπει να γίνουν αποτελεσματικές εκτιμήσεις του *expected shortfall*.
- v. Η μέθοδος *GPD* είναι εφαρμόσιμη σε δεδομένα με λεπτές ουρές (*light-tailed* $\xi = 0$) ή ακόμα και σε δεδομένα με κοντές ουρές (*short-tailed* $\xi < 0$), ενώ η μέθοδος του *Hill* είναι σχεδιασμένη ειδικά για περιπτώσεις δεδομένων με παχιές ουρές (*heavy-tailed* $\xi > 0$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

EXPECTED SHORTFALL

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφοροι εναλλακτικοί τρόποι υπολογισμού του κινδύνου της αγοράς. Στα άρθρα τους οι Artzner *et al.* (1997, 1999) δείχνουν ότι η μέθοδος μέτρησης του κινδύνου, *VaR*, έχει κάποιες θεωρητικές ατέλειες. Προτείνουν τις μεθόδους «*expected shortfall*» ή «*tail conditional expectation*». Η μέθοδος «*expected shortfall*» μετρά την αναμενόμενη απώλεια δοθέντως ότι η απώλεια L είναι μεγαλύτερη από τη *VaR*, σε μαθηματικούς όρους $E[L|L>VaR]$. Από τη στατιστική σκοπιά η μόνη πρόκληση όσον αφορά στην εφαρμογή μία από τις τρείς παραπάνω μεθόδους, έχει να κάνει με το κατά πόσο θα είναι καλή ή όχι η εκτίμηση των ουρών (*tails*) της κατανομής κερδών-απωλειών (*P&L distribution*). Υπό την προϋπόθεση ότι μια τέτοια εκτίμηση μπορεί να πραγματοποιηθεί και οι δύο μέθοδοι, *VaR* και «*expected shortfall*» είναι αρκετά εύκολο να υπολογιστούν.

Το *expected shortfall (ES)* προτάθηκε ως εναλλακτικό μέτρο εκτίμησης του κινδύνου. Παρόλο που μπορεί να θεωρηθεί εναλλακτική επιλογή μεθόδου εκτίμησης του κινδύνου της *VaR*, είναι συνδεδεμένο με αυτή, γιατί υπολογίζει τις αναμενόμενες απώλειες πέρα από τη *VaR*.

Σε δύο άρθρα τους οι Artzner *et al.* (1997, 1999) ασκούν κριτική στα μέτρα εκτίμησης του κινδύνου που βασίζονται στα ποσοστιαία σημεία (*quantile-based*), όπως η *VaR*, χαρακτηρίζοντάς τα ως μέτρα δύο βάσεων (*grounds*). Αρχικά δείχνουν ότι η *VaR* δεν είναι απαραίτητα *subadditive*. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου ένα χαρτοφυλάκιο μπορεί να χωριστεί σε υπο-χαρτοφυλάκια, τέτοια ώστε το άθροισμα των *VaR* που αντιστοιχεί σε κάθε χαρτοφυλάκιο να είναι μικρότερο από τη *VaR* όλου του χαρτοφυλακίου. Επιπλέον, η *VaR* δίνει μόνο το πάνω όριο των απωλειών που συμβαίνουν με συγκεκριμένη συχνότητα. Η *VaR* δεν πληροφορεί για το ενδεχόμενο μέγεθος της απώλειας, δοθέντος ότι η απώλεια υπερβαίνει αυτό το πάνω όριο. Το *expected shortfall* είναι ένας εναλλακτικός τρόπος εκτίμησης του κινδύνου, ο οποίος ξεπερνά τις παραπάνω ατέλειες. Συγκεκριμένα, αυτό το μέτρο κινδύνου δίνει πληροφόρηση για το μέγεθος της ενδεχόμενης απώλειας, δοθέντος ότι έχει πραγματοποιηθεί απώλεια μεγαλύτερου μεγέθους από το πάνω όριο.

Στο άρθρο τους οι Harmantidis, Chien και Miao (2005) συγκρίνουν τη θεωρία των ακραίων τιμών και το υπόδειγμα της σταθερής Pareto κατανομής με τα

υποδείγματα της ιστορικής προσομοίωσης και της κανονικής κατανομής, σχετικά με τις εκτιμήσεις τους για τη *VaR* και τα expected shortfalls.

1. ΟΡΙΣΜΟΙ

1.1. VALUE AT RISK

Στη συνέχεια υπενθυμίζουμε τον ορισμό της *VaR* για τη διευκόλυνση της κατανόησης της θεωρίας για το *expected shortfall*. Η *VaR* είναι ένας αριθμός που παρέχει μια ένδειξη για τις ενδεχόμενες πιθανές απώλειες ενός χαρτοφυλακίου για έναν συγκεκριμένο χρονορίζοντα και για ένα συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Έστω μια τυχαία μεταβλητή X , το αριστερό ποσοστιαίο σημείο σε επίπεδο εμπιστοσύνης α της κατανομής της X είναι:

$$q_\alpha(X) = \inf \{x : P[X \leq x] \geq \alpha\}. \quad (\text{IV.1})$$

Και η *VaR* δίνεται από τη σχέση:

$$VaR_\alpha(X) = -q_\alpha(X). \quad (\text{IV.2})$$

Η κριτική που γίνεται στην εκτίμηση της *VaR* αφορά στην έλλειψη συνοχής και το γεγονός ότι αγνοεί τις απώλειες πέρα από το επίπεδο της *VaR*. Εξίσου σημαντικό είναι το γεγονός ότι η *VaR* δεν είναι *subadditive*, δηλαδή «τιμωρεί» τη διαφοροποίηση ενός χαρτοφυλακίου αντί να την επιβραβεύει. Αυτή την «ατέλεια» της *VaR* έρχεται να καλύψει το *expected shortfall (ES)*.

1.2. EXPECTED SHORTFALL

To *expected shortfall*, σύμφωνα με τους *Delbaen (2001)* και *Föllmer και Schied (2002)*, ορίζεται ως:

$$ES_\alpha(X) = -\inf \{E[X | A] : P(A) > \alpha\}. \quad (\text{IV.3})$$

Εάν η κατανομή του X είναι συνεχής τότε ισχύει:

$$ES_a(X) = -E[X | X \leq q_a(X)]. \quad (\text{IV.4})$$

Οι Artzner, Delbaen, Eber και Heath (1999) πρώτοι ανέλυσαν τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της συνοχής (coherence). Έστω ένα σύνολο V *mappings (risks)* από ένα μετρήσιμο χώρο (Ω, \mathcal{A}) . Ένα *mapping* $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ θεωρείται εκτίμηση κινδύνου με συνοχή (*coherent risk measure*) εάν ισχύει ότι:

- i. είναι μονοτονική: $X, Y \in V, X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$
- ii. είναι *subadditive*: $X, Y, X + Y \in V \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- iii. είναι θετικά ομοιογενής: $X \in V, h \geq 0, hX \in V \Rightarrow \rho(hX) = h\rho(X)$
- iv. είναι *translation invariant*: $X \in V, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + a) = \rho(X) - a$.

Σύμφωνα με την παραπάνω δομή, η *VaR* δεν αποτελεί μία εκτίμηση του κινδύνου με συνοχή εφόσον δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της *subadditivity*.

2. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

2.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

Έστω ότι F_n απεικονίζει την εμπειρική διαδικασία των παρατηρούμενων απωλειών X_1, \dots, X_n τέτοια ώστε:

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq t), \quad (\text{IV.5})$$

όπου $I(\cdot)$ είναι η συνάρτηση δείκτης, και τα X_i κατανέμονται ανεξάρτητα και ισόνομα (*iid*) σύμφωνα με μία (άγνωστη) κατανομή F . Σύμφωνα με τυποποιημένα στατιστικά αποτελέσματα εμπειρικών διαδικασιών (Van Der Vaart, 1998), το αποσοστιαίο σημείο, $F^{-1}(a)$, μπορεί να εκτιμηθεί από την εξής σχέση:

$$F_n^{-1}(a) = X_{n(i)}, \quad a \in \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right], \quad (\text{IV.6})$$

όπου $X_{n(1)} \leq X_{n(2)} \leq \dots \leq X_{n(n)}$ είναι οι order statistics.

Το ιστορικό *expected shortfall (historical ES)* μπορεί να εκτιμηθεί ως:

$$ES = E(X | X > VaR) = \left(\sum_{i=\lceil na \rceil}^n X_{ni} \right) / (n - \lceil na \rceil). \quad (\text{IV.7})$$

2.2 ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ (GAUSSIAN APPROACH)

Έστω ένα δείγμα $X_i, i = 1, \dots, n$, μεταβλητών που κατανέμονται ανεξάρτητα και ισόνομα σύμφωνα με την κανονική κατανομή, $N(\mu, \sigma^2)$, με άγνωστο μ και σ (συχνά γίνεται η υπόθεση ότι $\mu = 0$). Τότε η VaR σε επίπεδο εμπιστοσύνης α δίνεται από $z_\alpha \sigma$, όπου z_α είναι τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $P(Z > z_\alpha) = \alpha$, με $Z \sim N(0, 1)$. Τότε το πρόβλημα περιορίζεται στην εκτίμηση της διακύμανσης:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M)^2, \quad (\text{IV.8})$$

$$\text{με } M := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Το κανονικό (*Gaussian*) *expected shortfall* υπολογίζεται:

$$ES = E(X | X > VaR) = E(X | X > Z_\alpha \sigma_t) = \sigma_t E(X / \sigma_t | X \sigma_t > Z_\alpha) \quad (\text{IV.9})$$

όπου $Z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ απεικονίζει το α ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, Φ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (*cdf*) της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Για ένα ορισμένο όριο (*threshold*) αξίας u , $E(Z | z > u) = \phi(u) / (1 - \Phi(u))$, όπου ϕ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (*pdf*) της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

2.3. ΘΕΩΡΙΑ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ

Σύμφωνα με τους *Embrechts, Klüppelberg και Mikosh (1997)*, υπάρχουν δύο τρόποι για να προσδιορίσεις τις ακραίες τιμές. Ο πρώτος τρόπος είναι η μεγιστοποίηση των μεταβλητών σε διαδοχικές περιόδους, ο οποίος λέγεται *Block Maxima Method (BMM)*. Και ο δεύτερος τρόπος, που ονομάζεται *Peak Over Threshold (POT)*, επικεντρώνει το ενδιαφέρον του σε μεταβλητές που βρίσκονται

πάνω από ένα δεδομένο όριο (*threshold*). Οι «μεγάλες» αυτές μεταβλητές αυτές ακολουθούν τη γενικευμένη *Pareto* κατανομή (*GPD*), η οποία συνήθως απεικονίζεται ως μία κατανομή δύο παραμέτρων με συνάρτηση κατανομής:

$$G_{\xi,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \sigma)^{-1/\xi} & \text{εαν } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\sigma) & \text{εαν } \xi = 0 \end{cases}. \quad (\text{IV.10})$$

Αντίστοιχα, η *VaR* και το *expected shortfall* που προκύπτουν από τη μέθοδο *POT* δίνονται από τις σχέσεις:

$$VaR_p = u + \frac{\sigma}{\xi} \left(\left(\frac{n}{N_u} p \right)^{\xi} - 1 \right), \quad (\text{IV.11})$$

$$ES_p = VaR_p + \frac{\sigma + \xi(VaR_p - \mu)}{1 - \xi} = \frac{VaR_p}{1 - \xi} + \frac{\sigma - \xi\mu}{1 - \xi}, \quad (\text{IV.12})$$

όπου

p: το επίπεδο εμπιστοσύνης

σ: η παράμετρος κλίμακας

u: το όριο (*threshold*)

ξ: ο δείκτης της ουράς (*tail index*) ή *shape parameter*

Άλλες θεωρίες που αφορούν στη θεωρία ακραίων τιμών (*EVT*) περιλαμβάνουν γενικευμένες κατανομές ακραίων τιμών, το θεώρημα *Fisher-Tippett*, το θεώρημα *Pickands-Balkema-de Haan*, κ.α.

2.4. ΣΤΑΘΕΡΗ PARETIAN ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Η σταθερή κατανομή παρουσιάστηκε αρχικά από τον *P.Lévy* μέσα στο 1920. Οι *Harmatzidis, Chien και Miao (2005)* χρησιμοποιούν στο άρθρο τους τον ορισμό που δίνει ο *Zolotarev (1986)*. Οι *Samorodnitsky και Taqqu (1994)*, κάνουν μια επίσης πολύ πλούσια ανάλυση της θεωρίας των σταθερών κατανομών. Ενώ οι *Janicki και Weron (1994)* επικεντρώνουν το ενδιαφέρον του άρθρου τους σε θέματα προσομοίωσης.

Υπό το νόμο σταθερότητας (*stable law*), το άθροισμα των ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών ακολουθεί την κατανομή των

summands (με διαφορετικές παραμέτρους). Η κατανομή χαρακτηρίζεται από τέσσερις παραμέτρους:

- i. τον χαρακτηριστικό εκθέτη (ή δείκτη σταθερότητας), $a \in (0,2]$,
- ii. την παράμετρο κλίμακας (η έκτασης), $\sigma \geq 0$,
- iii. την παράμετρο ασυμμετρίας, $\beta \in [-1,1]$ και
- iv. την παράμετρο θέσης, $\mu \in R$.

Εφόσον οι συναρτήσεις πυκνοτήτων πιθανότητας και κατανομών δεν είναι γνωστές σε μία κλειστή μορφή για τις περισσότερες σταθερές κατανομές, αυτές εξειδικεύονται από τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις τους (*c.f.*). Μία τυχαία μεταβλητή X έχει μία σταθερή κατανομή εάν και μόνο οι χαρακτηριστικές της συναρτήσεις είναι, σύμφωνα με τον Lévy (1934), της μορφής:

Σε εκθετική μορφή:

$$E(\exp iXt) = \begin{cases} \exp \left\{ -\sigma^a |t|^a \left(1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) + i\mu t \right\} & \varepsilon\alpha\nu \quad a \neq 1 \\ \exp \left\{ -\sigma |t| \left(1 + \frac{2i\beta}{\pi} \text{sign}(t) \ln |t| \right) + i\mu t \right\} & \varepsilon\alpha\nu \quad a = 1 \end{cases}, \quad (\text{IV.13})$$

και σε λογαριθμική μορφή:

$$\log \phi(t) = \begin{cases} -\sigma^a |t|^a \left\{ 1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right\} + i\mu t & \varepsilon\alpha\nu \quad a \neq 1 \\ -\sigma |t| \left\{ 1 + i\beta \text{sign}(t) \frac{2}{\pi} \log |t| \right\} + i\mu t & \varepsilon\alpha\nu \quad a = 1 \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

εφόσον και η (IV.13) και η (IV.14) χαρακτηρίζονται από τέσσερις παραμέτρους, οι *alpha-stable* κατανομές θα απεικονίζονται ως $X \sim S_a(\sigma, \beta, \mu)$. Ο χαρακτηριστικός εκθέτης, α , καθορίζει το ρυθμό της μείωσης (*decay*), δηλαδή, το πόσο παχιές θα είναι οι ουρές της κατανομής. Η παράμετρος β είναι ο δείκτης ασυμμετρίας της κατανομής, όπου $\beta = 0$ αντιστοιχεί στη συμμετρική περίπτωση. Οι παράμετροι α , β μαζί καθορίζουν το σχήμα της κατανομής. Η παράμετρος μ μετακινεί την κατανομή αριστερά ή δεξιά, ενώ η παράμετρος σ διευρύνει ή συστειρώνει την κατανομή γύρω

από το μ . Και οι δύο παράμετροι, μ και σ , δεν επηρεάζουν το σχήμα της κατανομής. Οι *Samorodnitsky και Taqqu (1994)* ορίζουν την τυποποιημένη σταθερή κατανομή ως $X \sim S_a(1, \beta, 0)$. Επιπλέον η συμμετρική σταθερή κατανομή γράφεται ως $X \sim SaS$, όπου $\beta = 0$. Και τέλος, ως $X \sim S_a(\sigma, 1, \mu)$ ορίζεται η συνολικά (θετικά) ασύμμετρη σταθερή κατανομή.

Εάν $\alpha = 2$, η *alpha*-σταθερή κατανομή μετατρέπεται σε κανονική κατανομή (*Gaussian, normal*). Η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι:

$$E \exp i\theta X = \exp \left\{ -\sigma^2 \theta^2 + i\mu\theta \right\}. \quad (\text{IV.15})$$

Αντίστοιχα, εάν $\alpha = 1$, η *alpha*-σταθερή κατανομή γίνεται η κατανομή *Cauchy*, και για $\alpha = 0,5$ και $|\beta| = 1$ γίνεται η κατανομή *Lévy* (*Weron, 2002*).

Η κανονική απεικόνιση της σχέσης (IV.14) έχει το εξής χαρακτηριστικό: οι συναρτήσεις $\phi(t)$ δεν είναι συνεχείς συναρτήσεις των παραμέτρων που τις προσδιορίζουν. Εμφανίζουν ασυνέχειες όταν $\alpha = 1$ και $\beta \neq 0$. Για αυτό το λόγο ο *Zolotarev (1986)* θέτει:

$$\mu_1 = \begin{cases} \mu + \beta \sigma^\alpha \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \varepsilon\alpha\nu \quad \alpha \neq 1 \\ \mu & \varepsilon\alpha\nu \quad \alpha = 1 \end{cases}, \quad (\text{IV.16})$$

και

$$\log \phi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha \left\{ |t|^\alpha - it\beta(|t|^{\alpha-1} - 1) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right\} + i\mu_1 t & \varepsilon\alpha\nu \quad \alpha \neq 1 \\ -\sigma|t| \left\{ 1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{2}{\pi} \log |t| \right\} + i\mu_1 t & \varepsilon\alpha\nu \quad \alpha = 1 \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

η οποία είναι συνδυαστικά (*jointly*) συνεχής στις παραμέτρους α και β . Το μειονέκτημα αυτής της μορφής είναι ότι το μ_1 δε θεωρείται πλέον παράμετρος θέσης (*location parameter*). Για αυτό το λόγο οι περισσότεροι συγγραφείς χρησιμοποιούν τη μορφή (IV.14).

Ο Zolotarev (1986) παρουσιάζει και μια άλλη μορφή των χαρακτηριστικών συναρτήσεων:

$$\log \phi(t) = \begin{cases} -\sigma_2^a |t|^a \exp \left\{ -i\beta_2 \text{sign}(t) \frac{\pi}{2} K(a) \right\} + i\mu t & \varepsilon \alpha \nu \quad a \neq 1 \\ -\sigma_2 |t| \left\{ \frac{\pi}{2} + i\beta_2 \text{sign}(t) \log |t| \right\} + i\mu t & \varepsilon \alpha \nu \quad a = 1 \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

όπου

$$K(a) = a - 1 + \text{sign}(1-a) = \begin{cases} a, & a < 1 \\ a - 2, & a > 1 \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

Οι παράμετροι σ_2 και β_2 σχετίζονται με τις παραμέτρους σ και β σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις. Για $a \neq 1$, β_2 είναι τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\tan \left(\beta_2 \frac{\pi K(\alpha)}{2} \right) = \beta \tan \frac{\pi \alpha}{2}, \quad (\text{IV.20})$$

και για τη νέα παράμετρο κλίμακας ισχύει:

$$\sigma_2 = \sigma \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi \alpha}{2} \right)^{1/(1-\alpha)}. \quad (\text{IV.21})$$

Για $\alpha = 1$ τότε $\beta_2 = \beta$ και $\sigma_2 = \frac{2}{\pi} \sigma$.

Σύμφωνα με τον Weron (1996), η συνάρτηση κατανομής $F(x, a, \beta_2)$ μιας τυποποιημένης σταθερής (*stable*) τυχαίας μεταβλητής, της οποίας η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι της μορφής (IV.18) δίνεται από τη σχέση:

- εάν $a \neq 1$ και $x > 0$ τότε

$$F(x, \alpha, \beta_2) = C(\alpha, \beta_2) + \frac{\varepsilon(\alpha)}{\pi} \int_{\gamma_0}^{\pi/2} \exp[-x^{\alpha/(a-1)} U_a(\gamma, \gamma_0)] d\gamma \quad (\text{IV.22})$$

- εάν $\alpha = 1$ και $\beta_2 > 0$ τότε

$$F(x, 1, \beta_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp[-e^{-x/\beta_2} U_1(\gamma, \beta_2)] d\gamma \quad (\text{IV.23})$$

όπου

$$\varepsilon(\alpha) = sign(1 - \alpha),$$

$$\gamma_0 = -\frac{\pi}{2} \beta_2 \frac{K(\alpha)}{\alpha},$$

$$C(\alpha, \beta_2) = 1 - \frac{1}{4} (1 + \beta_2 K(\alpha)/\alpha)(1 + \varepsilon(\alpha)),$$

$$U_a(\gamma, \gamma_0) = \left(\frac{\sin \alpha(\gamma - \gamma_0)}{\cos \gamma} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \frac{\cos(\gamma - \alpha(\gamma - \gamma_0))}{\cos \gamma}, \quad (\text{IV.24})$$

και

$$U_1(\gamma, \beta_2) = \frac{\frac{\pi}{2} + \beta_2 \gamma}{\cos \gamma} \exp\left(\frac{1}{\beta_2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta_2 \gamma\right) \tan \gamma\right) \quad (\text{IV.25})$$

Οι περιπτώσεις όπου ισχύει $\alpha \neq 1$, $x < 0$ ή $\alpha = 1$ και $\beta_2 < 0$ μπορούν να αναχθούν στις περιπτώσεις $\alpha \neq 1$, $x > 0$ και $\alpha = 1$, $\beta_2 > 0$, με τη βοήθεια της ακόλουθης ισότητας:

$$F(-x, \alpha, \beta_2) + F(x, \alpha, -\beta_2) = 1 \quad (\text{IV.26})$$

η οποία ισχύει και για τις δύο μορφές των χαρακτηριστικών συναρτήσεων, (IV.14) και (IV.18), για κάθε πραγματικό x και για κάθε αποδεκτή παράμετρο α και β_2 (ή β).

2.4.1. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ALPHA-STABLE ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Η πολυπλοκότητα του προβλήματος της προσομοίωσης μιας αλληλουχίας *stable* τυχαίων μεταβλητών έγκειται στο γεγονός ότι δεν υπάρχει αναλυτική μορφή της

αντίστροφης της συνάρτησης κατανομής, F^{-1} . Οι μόνες εξαιρέσεις είναι οι κατανομές *Gaussian*, *Cauchy* και *Lévy*, για τις οποίες έχουν προσδιοριστεί απλές μέθοδοι προσομοίωσης.

Μια λύση προτάθηκε από τον *Kanter* (1975), όπου με μια άμεση μέθοδο προσομοιώνει $S_a(1,1,0)$ τυχαίες μεταβλητές, για $a < 1$. Αποδείχθηκε ότι αυτή η μέθοδος μπορούσε εύκολα να γενικευτεί. Οι *Chambers, Mallows και Stuck* (1976) είναι οι πρώτοι που παρουσίασαν τη φόρμουλα. Παρόλα αυτά δεν παρουσίασαν απόδειξη της φόρμουλας, αλλά έκαναν παραπομπές στο άρθρο του *Zolotarev* (1986), όπου παρουσιάζονται οι σχέσεις (IV.22) και (IV.23). Στο άρθρο του ο *Weron* (1996) επεξηγεί τις όποιες ανακρίβειες, όσον αφορά τη φόρμουλα των *Chambers, Mallows και Stuck* (1976), που προέκυψαν λόγω της έλλειψης των αποδείξεων.

Ο αλγόριθμος των *Chambers, Mallows και Stuck* (1976) είναι ο ακόλουθος όπως παρουσιάζεται από τον *Weron* (1996) (θεώρημα 3.1 *Weron* σελ. 169):

Θεώρημα: Έστω $\gamma_0 = -\frac{\pi}{2} \beta_2 \frac{K(a)}{a}$, $a \in (0,2]$, $\beta \in [-1,1]$ (*Zolotarev*, 1986, σχόλιο 1 σελ. 78). Και έστω ότι το γ κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και

W είναι μια ανεξάρτητη εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέσο ίσο με τη μονάδα, τότε:

- για $a \neq 1$

$$X = \frac{\sin a(\gamma - \gamma_0)}{(\cos \gamma)^{1/a}} \left(\frac{\cos(\gamma - \alpha(\gamma - \gamma_0))}{W} \right)^{(1-a)/a}, \quad (\text{IV.27})$$

όπου κατανέμεται ως $X \sim S_a(1, \beta_2, 0)$.

- για $a = 1$

$$X = \left(\frac{\pi}{2} + \beta_2 \gamma \right) \tan \gamma - \beta_2 \log \left(\frac{W \cos \gamma}{\frac{\pi}{2} + \beta_2 \gamma} \right), \quad (\text{IV.28})$$

όπου κατανέμεται ως $X \sim S_1(1, \beta_2, 0)$.

Εφαρμόζοντας το παραπάνω θεώρημα μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε μια διαδικασία παραγωγής μιας ασύμμετρης τυχαίας μεταβλητής $X \sim S_a(1, \beta, 0)$, όπου $a \in (0, 2]$ και $\beta \in [-1, 1]$, με τα εξής βήματα (*Weron (1996)*):

- Παράγουμε μια τυχαία μεταβλητή V , η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, και μια ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή W με μέσο ίσο με τη μονάδα.
- Για $a \neq 1$ υπολογίζουμε

$$X = S_{a,\beta} \times \frac{\sin(a(V + B_{a,\beta}))}{(\cos(V))^{1/a}} \times \left(\frac{\cos(V - a(V + B_{a,\beta}))}{W} \right)^{(1-a)/a}, \quad (\text{IV.29})$$

όπου

$$B_{a,\beta} = \frac{\arctan\left(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{a}, \quad (\text{IV.30})$$

$$S_{a,\beta} = \left[1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2} \right]^{1/(2\alpha)} \quad (\text{IV.31})$$

- Για $a = 1$ υπολογίζουμε

$$X = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V \right) \tan V - \beta \log \left(\frac{W \cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V} \right) \right]. \quad (\text{IV.32})$$

Το $B_{a,\beta}$ εξηγεί την αλλαγή των παραμέτρων από β_2 σε β και παίρνει τη θέση του γ_0 στη σχέση (IV.27). Το $S_{a,\beta}$ εξηγεί την αλλαγή των παραμέτρων από σ_2 σε σ . Η φόρμουλα της σχέσης (IV.29) παρουσιάστηκε αρχικά από τους *Janicki και Weron (1994)*. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι στο άρθρο τους οι *Janicki και Weron (1994)*, στη σχέση (IV.29), αντί του $B_{a,\beta}$ έχουν το $C_{a,\beta}$, όπου

$$C_{a,\beta} = \frac{\arctan\left(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{1 - |1 - a|} \quad \text{και μια πιο πολύπλοκη υπολογιστικά σχέση για το } S_{a,\beta},$$

όπου το απεικονίζουν ως $D_{\alpha,\beta}$. Σύμφωνα με τον *Weron (1996)* η προσέγγιση των *Janicki και Weron (1994)* είναι λανθασμένη.

Και η φόρμουλα για την προσομοίωση των τυποποιημένων σταθερών (*stable*) τυχαίων μεταβλητών είναι της μορφής:

$$\text{Εάν } X \sim S_a(1, \beta, 0) \quad \text{τότε} \quad Y \sim S_a(\sigma, \beta, \mu), \quad (\text{IV.33})$$

όπου

$$Y = \begin{cases} \sigma X + \mu, & a \neq 1 \\ \sigma X + \frac{2}{\pi} \beta \sigma \log \sigma + \mu, & a = 1 \end{cases}. \quad (\text{IV.34})$$

3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ HARMANTZIDIS, CHIEN & MIAO (2005)

Οι *Harmantzidis, Chien και Miao (2005)*, έχοντας ως δεδομένες τις παρατηρήσεις των αποδόσεων, X_i , αρχικά εκτιμούν τις παραμέτρους χρησιμοποιώντας τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας (*MLE*) (*Mittnik, Rachev, Doganoglu και Chenyao, 1999*). Έχοντας εκτιμήσει και τις τέσσερις παραμέτρους, χρησιμοποιούν προσομοιώσεις *Monte Carlo* για να δημιουργήσουν (*generate*) μεταβλητές που προέρχονται από τον αλγόριθμο των *Chambers, Mallows και Stuck (1976)*. Με τη χρήση της προσομοιωμένης κατανομής των κερδών και των απωλειών (*P&L*) γίνεται η εκτίμηση για την *Stable VaR* και το *Stable Expected Shortfall*, σε διάφορα επίπεδα εμπιστοσύνης, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της ιστορικής προσομοίωσης. Ακολουθούν την ίδια μεθοδολογία και για την εκτίμηση των συμμετρικών *Stable VaR* και *Stable Expected Shortfall*.

Οι χρονολογικές σειρές των δεδομένων που μελετούν περιλαμβάνουν τέσσερα επιτόκια συναλλαγματικών ισοτιμιών (*USD/Yen, Pound/USD, USD/Canadian, USD/Euro*) και έξι δείκτες μετοχών της αγοράς (*S&P500 (US), FTSE100 (UK), Nikkei225 (Japan), DAX (Germany), CAC40 (France), TSE300 (Canada)*), και η πλειοψηφία των δεδομένων τους αφορούν στο διάστημα Ιανουάριος 1990 εως Δεκέμβριος 2003.

Τα αποτελέσματα της μελέτης τους συνοψίζονται στα εξής: Για την εκτίμηση της *VaR* σε επίπεδο σημαντικότητας 95%, με τη χρήση των υποδειγμάτων *Gaussian* και *POT* απορρίπτονται λιγότερες μηδενικές υποθέσεις από ότι με τη χρήση των υποδειγμάτων ιστορικής προσομοίωσης και *Stable*. Αυτό συνεπάγεται ότι τα υποδείγματα *Gaussian* και *POT* οδηγούν σε πιο ακριβείς εκτιμήσεις της *VaR*. Παρόλα αυτά το κανονικό υπόδειγμα δείχνει να είναι επαρκές για την εκτίμηση της *VaR* σε χαμηλά επίπεδα εμπιστοσύνης. Σε υψηλότερα επίπεδα εμπιστοσύνης, π.χ. 99% είναι ξεκάθαρο ότι υποδείγματα που χρησιμοποιούν κατανομές με παχιές ουρές παράγουν πιο ακριβείς εκτιμήσεις από τα υποδείγματα που χρησιμοποιούν κατανομές χωρίς παχιές ουρές.

Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% δεν είναι ξεκάθαρο αν το μέγεθος του δείγματος (*window size*) επηρεάζει την απόδοση των υποδειγμάτων. Αντιθέτως, σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99% διαπιστώνεται ότι όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος το, τόσο πιο ακριβείς και οι εκτιμήσεις.

Η υπόθεση για την ασυμμετρία των δεδομένων δείχνει να επηρεάζει τις εκτιμήσεις. Τα *Stable* υπόδειγματα χρησιμοποιούν μια επιπλέον παράμετρο για να καλύψουν την ασυμμετρία των δεδομένων, ενώ τα *SaS* υπόδειγματα υποθέτουν συμμετρία των δεδομένων. Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% το υπόδειγμα *SaS* οδηγεί σε εκτιμήσεις που πλησιάζουν το *Gaussian*, για αυτό το λόγο είναι καλύτερο από το *Stable*, ιδιαίτερα για δεδομένα με χαμηλή ασυμμετρία. Όμως, για δεδομένα που η κατανομή τους έχει παχιές ουρές, το *Stable* υπόδειγμα δίνει καλύτερες εκτιμήσεις από το *SaS*. Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99% και το υπόδειγμα *Stable* αλλά και το *SaS* δίνουν καλύτερες εκτιμήσεις από υποδείγματα που δε λαμβάνουν υπόψη τους τις παχιές ουρές των κατανομών.

Όσον αφορά στην εκτίμηση των *ES*, η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης είναι η περισσότερο ακριβής, ανεξάρτητα από το επίπεδο εμπιστοσύνης και το μέγεθος του δείγματος. Το υπόδειγμα *POT* υπερέχει των υπολοίπων, εκτός από την περίπτωση όπου το μέγεθος του δείγματος είναι πολύ μικρό. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, τα υποδείγματα *Gaussian* και *Stable* δεν δίνουν ορθές εκτιμήσεις για το *ES*. Το *Gaussian* υπόδειγμα συνεχώς υποεκτιμά το *ES*, ενώ το *Stable* υπερεκτιμά το *ES*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Η πλειοψηφία των ερευνών όσον αφορά τις οικονομικές προβλέψεις επικεντρώνεται στην παραγωγή και αξιολόγηση των προβλέψεων σημείων. Η πρόβλεψη σημείων είναι εύκολη στον υπολογισμό, στην ερμηνεία της και καθοδηγεί το επόμενο βήμα του ατόμου που αξιολογεί την πρόβλεψη.

Από τη φύση τους οι προβλέψεις σημείων έχουν περιορισμένη αξία γιατί περιγράφουν μόνο ένα πιθανό αποτέλεσμα. Οι προβλέψεις διαστημάτων είναι εξίσου σημαντικές. Προσδιορίζουν ένα πιθανό διάνυσμα αποτελεσμάτων, επιτρέποντας για έναν πλήρη σχεδιασμό σύμφωνα με τα ενδεχόμενα αποτελέσματα.

Ένα από τα κίνητρα του άρθρου του Engle (1982) ήταν να κάνει δυναμικές προβλέψεις διαστημάτων (*dynamic interval forecasts*) γύρω από προβλέψεις σημείων. Η ιδέα του ήταν ότι τα διαστήματα πρέπει να είναι στενά σε ήρεμες περιόδους και διευρυμένα σε περιόδους διακυμάνσεων, έτσι ώστε οι παρατηρήσεις που βρίσκονται εκτός του διαστήματος πρόβλεψης να είναι διασπαρμένες κατά μήκος όλου του δείγματος, και να μην είναι συγκεντρωμένες σε συγκεκριμένα σημεία. Μια πρόβλεψη διαστήματος η οποία αποτυγχάνει να εξηγήσει δυναμική μεγαλύτερου βαθμού, μπορεί να είναι σωστή κατά μέσο όρο (να έχει σωστή μηδεσμευμένη κάλυψη), αλλά σε κάθε δοθείσα χρονική περίοδο θα έχει λανθασμένη δεσμευμένη κάλυψη, η οποία θα χαρακτηρίζεται από παρατηρήσεις που βρίσκονται εκτός του διαστήματος πρόβλεψης να είναι συγκεντρωμένες σε συγκεκριμένα σημεία.

Οι Christoffersen, Hahn και Inoue (1999) στο άρθρο τους απαντούν στις ακόλουθες ερωτήσεις:

- 1) Δοθείσας της εκτίμησης *VaR*, πώς μπορεί ο διαχειριστής του κινδύνου να ελέγξει ότι η συγκεκριμένη μέτρηση έχει προσδιοριστεί κατάλληλα.
- 2) Έστω ότι έχουμε δύο εκτιμήσεις της *VaR*, μία μέσω χρήσης ενός *GARCH* υποδείγματος και μία μέσω χρήσης της «*implied*» διακύμανσης, πώς μπορεί ο διαχειριστής του κινδύνου να τις συγκρίνει και να επιλέξει την καλύτερη σύμφωνα με στατιστικά κριτήρια.

- 3) Πώς μπορεί ο διαχειριστής του κινδύνου να μελετήσει την πιθανότητα συνδυασμού δύο ή περισσοτέρων διαφορετικών τρόπων υπολογισμού της *VaR* με στόχο να αποκτήσει μία στατιστικά μοναδική βέλτιστη εκτίμηση.

1. VAR ΜΕ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ ΡΟΠΩΝ

1.1. ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΡΟΠΩΝ

Εάν οι αποδόσεις που κανονικοποιούνται με τη χρήση της δεσμευμένης μέσης απόδοσης και έναν μετασχηματισμό της διακύμανσής τους, $(y_t - \mu_t)/\xi(\sigma_t)$, δεν κατανέμονται ανεξάρτητα και ισόνομα, τότε η διακύμανση δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό του δεσμευμένου ποσοστιαίου σημείου. Τυπικά, σύμφωνα με τους Christoffersen, Hahn, Inoue (1999), γίνεται έμμεσα η υπόθεση ότι οι τυποποιημένες αποδόσεις, $(y_t - \mu_t)/\xi(\sigma_t)$, κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα (δηλαδή τα y_t ανήκουν σε μια *location-scale* οικογένεια). Αυτή η υπόθεση συνεπάγεται ότι το δεσμευμένο ποσοστιαίο σημείο (*conditional quantile*) είναι γραμμική συνάρτηση της διακύμανσης και ότι οι σχετικοί συντελεστές της καθορίζονται από την κοινή κατανομή των τυποποιημένων αποδόσεων. Για αυτό το λόγο μπορούμε να σκεφτούμε την εκτίμηση της *VaR* ως το αποτέλεσμα μιας παλινδρόμησης του ποσοστιαίου σημείου. Αντιμετωπίζοντας τη διακύμανση ως «*regressor*» και αγνοώντας τις δυναμικότητες (*dynamics*) του δεσμευμένου μέσου μπορούμε να έχουμε την εξής σχέση:

$$F_{t|t-1}(\beta_p) = \beta_{p,1} + \beta_{p,2}\sigma_t \quad (\text{V.1})$$

για κάποια $\beta_{p,1}$ και $\beta_{p,2}$. Οι Christoffersen, Hahn, Inoue (1999) σημειώνουν ότι οι παράμετροι ποικίλουν ανάλογα με την εκάστοτε κάλυψη, p . Η σχέση αυτή μπορεί να διαφοροποιείται ανάλογα με το υπόδειγμα διακύμανσης στο οποίο βασίζεται και την υπόθεση που γίνεται για την κατανομή των αποδόσεων. Δηλαδή, μπορούμε να έχουμε την εξής σχέση:

$$F_{t|t-1}^*(\theta_p) = \theta_{p,1} + \theta_{p,2}\sigma_t^*. \quad (\text{V.2})$$

Σε αυτό το σημείο οι *Christoffersen, Hahn, Inoue (1999)* διατυπώνουν τρεις ερωτήσεις:

- 1) Πώς μπορούμε να αξιολογήσουμε την καταλληλότητα της εξειδίκευσης των εκτιμήσεων;
- 2) Πώς μπορούμε να τις συγκρίνουμε;
- 3) Μπορούμε να τις συνδυάσουμε ώστε να αποκτήσουμε μια ακόμα καλύτερη εκτίμηση;

Για να απαντήσουν οι *Christoffersen, Hahn, Inoue (1999)* στις προηγούμενες ερωτήσεις παρουσιάζουν την ακόλουθη δομή για τις δεσμευμένες ροπές. Όσον αφορά στην πρώτη ερώτηση, κάνουν την εξής υπόθεση: Δοθέντος του συνόλου πληροφόρησης του κινδύνου του μάνατζερ, Ψ_{t-1} , και κάτω από τη μηδενική υπόθεση ότι η εξειδίκευση της VaR είναι σωστή, προκύπτει ο ορισμός:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: η εκτίμηση της VaR είναι αποτελεσματική σε σχέση με το σύνολο πληροφόρησης Ψ_{t-1} , όταν

$$E[I(y_t \prec F_{t-1}(\beta_p)) - p | \Psi_{t-1}] = 0, \quad (\text{V.3})$$

όπου $I(\cdot)$ είναι η συνάρτηση δείκτης (*indicator function*).

Αυτή η δέσμευση των ροπών δείχνει ότι καμία πληροφορία διαθέσιμη στον διαχειριστή του κινδύνου στο χρόνο $t-1$ μπορεί να βοηθήσει στο να προβλέψουμε εάν οι αποδόσεις τη χρονική στιγμή t θα είναι μεγαλύτερες ή μικρότερες της εκτίμησης VaR τη χρονική στιγμή $t-1$. δηλαδή, η εκτίμηση της VaR είναι αποτελεσματική σε σχέση μόνο με το σύνολο πληροφόρησης Ψ_{t-1} . Οι *Christoffersen, Hahn, Inoue (1999)* το ονομάζουν «συνθήκης αποτελεσματικότητας της VaR». Στη συνέχεια αναδιατυπώνουν την πρώτη ερώτηση: «Μπορεί μια συγκεκριμένη εκτίμηση της VaR να ικανοποιεί τη συνθήκη αποτελεσματικότητας της VaR;».

Είναι πιθανόν οι περισσότερες εκτιμήσεις VaR να είναι λανθασμένα εξειδικευμένες. Είναι δύσκολο να σκεφτούμε ότι κάθε οικονομετρικό υπόδειγμα VaR αποτελεί μία ακριβή περιγραφή της διαδικασίας δημιουργίας των δεδομένων. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί αν η πραγματική κατανομή δεν ανήκει σε μια *location-scale* οικογένεια. Υπό αυτές τις συνθήκες, το δεσμευμένο ποσοστιαίο σημείο πιθανόν να μην είναι συνάρτηση μόνο της δεσμευμένης διακύμανσης, αλλά η δεσμευμένη κύρτωση να παίζει σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό του ποσοστιαίου σημείου.

Έπειτα είναι πιθανόν ότι κάθε εκτίμηση της *VaR* να απορρίπτεται δοθέντος ενός αρκετά μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων. Για αυτό το λόγο θέλουμε η μεθολογία ελέγχου να περιλαμβάνει το ενδεχόμενο λανθασμένης εξειδίκευσης υποδείγματος.

Στη συνέχεια οι *Christoffersen, Hahn, Inoue (1999)* επαναδιατυπώνουν τη δεύτερη ερώτηση: «πώς μπορούμε να συγκρίνουμε τις λανθασμένες εξειδικεύσεις *VaR*;». Για να απαντήσουν στην ερώτηση οι *Christoffersen, Hahn, Inoue (1999)* υπενθυμίζουν την εναλλακτική εκτίμηση *VaR*, $F_{t|t-1}^*(\theta_p)$ και γράφουν:

$$E[I(y_t \prec F_{t|t-1}^*(\theta_p)) - p | \Psi_{t-1}] = 0. \quad (\text{V.4})$$

Για να ελέγξουν εάν $F_{t|t-1}^*(\beta_p)$ είναι σημαντικά καλύτερο από $F_{t|t-1}^*(\theta_p)$ χρησιμοποιούν τις παραπάνω συνθήκες ροπών.

Ακόμα και εάν μια εκτίμηση *VaR* κυριαρχεί μιας άλλης, μπορεί ακόμα να θέλουμε να ελέγξουμε εάν μπορούμε να βελτιώσουμε επιπλέον την εκτίμηση. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω του ελέγχου της έμμεσης υπόθεσης για *location-scale*. Εάν αυτή η υπόθεση παραβιάζεται είναι πιθανόν μια εκτίμηση *VaR* να είναι καλύτερη από μια άλλη, αλλά καμία από αυτές να μην ικανοποιεί τη συνθήκη αποτελεσματικότητας στον πληθυσμό. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, είναι πιθανόν να βελτιώσουμε την «καλύτερη» εκτίμηση *VaR* συνδυάζοντάς τη με μία «χειρότερη» εκτίμηση διακύμανσης. Την ιδέα του συνδυασμού πρόβλεψης την εισήγαγαν στη βιβλιογραφία της πρόβλεψης του δεσμευμένου μέσου οι *Bates και Granger (1969)*, και οι *Stock και Watson (1998)* στο άρθρο τους δίνουν νέα στοιχεία για την επιτυχία της ιδέας στην πρόβλεψη μακροοικονομικών χρονολογικών σειρών.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εάν η εκτίμηση της *VaR* είναι ορθά εξειδικευμένη τότε:

$$E[I(y_t \prec F_{t|t-1}(\beta_p)) - p | \Psi_{t-1}] = 0. \quad (\text{V.5})$$

Οι *Christoffersen, Hahn, Inoue (1999)* υποθέτουν ότι τα *instruments* $\{z_1, z_{t-1}, \dots\}$ συμπεριλαμβάνονται στο σύνολο πληροφόρησης Ψ_t . Σημειώνουν επίσης ότι σύμφωνα με το νόμο των επαναλαμβανόμενων προσδοκιών ισχύει:

$$E[(I(y_t \prec F_{t|t-1}(\beta_p)) - p) \times k(z_{t-1}, z_{t-2}, \dots)] = 0 \quad (\text{V.6})$$

για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση δείκτη-αξίας $k(\cdot)$ των $\{z_t, z_{t-1}, \dots\}$. Για απλότητα, παραλείπουν τους δείκτες t , p και γράφουν τη σχέση (V.6) ως $E[f(x, \beta)] = 0$, όπου το διάνυσμα x περιλαμβάνει τα στοιχεία z_t και y_t καθώς επίσης και σ_t .

2.1. ΈΛΕΓΧΟΣ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΤΗΣ VAR

Ο έλεγχος GMM του *Hansen (1982)*, γνωστός ως έλεγχος J (J -test), χρησιμοποιείται για τον έλεγχο του συμπεράσματος της σχέσης (V.6). Ο έλεγχος είναι της μορφής:

$$T \bar{f}_T(\hat{\beta})' W \bar{f}_T(\hat{\beta}), \quad (\text{V.7})$$

όπου

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \bar{f}_T(\beta)' W \bar{f}_T(\beta) \quad (\text{V.8})$$

και

$$\bar{f}_T(\beta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(x_t, \beta), \quad (\text{V.9})$$

και W είναι η βέλτιστη μήτρα των βαρών που κάνει τη μέθοδο GMM έναν συνεπή και ασυμπτωτικά αποτελεσματικό εκτιμητή. Είναι φανερό ότι λόγω της ύπαρξης της συνάρτησης-δείκτη, $I(\cdot)$, η συνάρτηση ροπών $f(x, \beta)$ δεν είναι διαφοροποιήσιμη στο β , κάτι που αποτελεί οικονομετρικά μία πρόκληση. Όσον αφορά στον έλεγχο εξειδίκευσης, αυτή η πρόκληση έχει αντιμετωπιστεί από τους *Pakes* και *Pollard (1989)*, οι οποίοι εφάρμοσαν τεχνικές προσομοίωσης.

Παρόλο που η μέθοδος GMM είναι κατάλληλη για τον έλεγχο εξειδίκευσης των εκτιμήσεων *VaR*, δεν είναι καθόλου κατάλληλη για «*nonnested*» συγκρίσεις πιθανώς λανθασμένα εξειδικευμένων υποδειγμάτων.

2.2. «NONNESTED» VAR ΣΥΓΚΡΙΣΗ

Για τον έλεγχο εξειδίκευσης θα μπορούσαμε να είχαμε βασιστεί, σύμφωνα με τους *Christoffersen, Hahn, Inoue (1999)*, στην πληροφόρηση, θεωρητικά εναλλακτικής της μεθόδου *GMM* των *Kitamura και Stutzer (1997)*:

$$\beta^* = \arg \max_{\beta} \min_{\gamma} E_{\mu} [\exp(\gamma f(x, \beta))] \quad (\text{V.10})$$

π.χ.

$$\hat{\beta}_T = \arg \max_{\beta} \min_{\gamma} M_T(\beta, \gamma) = \arg \max_{\beta} \min_{\gamma} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \exp(\gamma f(x_t, \beta)). \quad (\text{V.11})$$

Η εκτίμησή τους βασίζεται στη διαισθητική προσέγγιση ότι, κάτω από τη σωστή εξειδίκευση, β^* ελαχιστοποιεί το κριτήριο πληροφορίας *Kullback-Leibler (Kullback-Leibler information criterion-KLIC)*. Η εφαρμογή του έχει μία ενδιαφέρουσα γενίκευση για τον έλεγχο της «nonnested» υπόθεσης, όπως αναφέρει ο *Kitamura (1997)*.

Έστω ότι έχουμε δυο εκτιμήσεις *VaR*, $F_{t|t-1}(\beta_p)$, και $F_{t|t-1}^*(\theta_p)$, των οποίων οι συνθήκες ροπών μπορούν να γραφούν ως:

$$E[f(x, \beta_p)] = E[I(y_t < F_{t|t-1}(\beta_p)) - p] \times k(z_{t-1}) = 0 \quad (\text{V.12})$$

και

$$E[g(x, \theta_p)] = E[I(y_t < F_{t|t-1}^*(\theta_p)) - p] \times k(z_{t-1}) = 0, \quad (\text{V.13})$$

όπου $k(\cdot)$ είναι μία δοθείσα πεπερασμένων διαστάσεων συνάρτηση διανυσμάτων αξίας. Ας σημειώσουμε ότι καμία εκτίμηση *VaR* δε «φωλιάζει-nest» την άλλη, και ο παραδοσιακός έλεγχος της «nested» υπόθεσης δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σύγκριση αυτών των δύο εκτιμήσεων της *VaR*.

Ο *Kitamura* (1997) πρότεινε τον έλεγχο τέτοιων «*nonnested*» υποθέσεων μέσω της σύγκρισης των αποστάσεων των *KLIC* των δύο περιορισμών των ροπών στον πληθυσμό. Ο περιορισμός της ροπής με τη μικρότερη απόσταση *KLIC* θα γίνεται αποδεκτός: ο έλεγχος βασίζεται στην διαφορά ανάμεσα στις αποστάσεις των εξής *KLIC*

$$M_T(\hat{\beta}_T, \hat{\gamma}_T) = \max_{\beta} \min_{\gamma} M_T(\beta, \gamma) \left(= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \exp[\gamma f(x_t, \beta)] \right) \quad (\text{V.14})$$

και

$$N_T(\hat{\theta}_T, \hat{\lambda}_T) = \max_{\theta} \min_{\lambda} N_T(\theta, \lambda) \left(= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \exp[\lambda' g(x_t, \theta)] \right). \quad (\text{V.15})$$

Ο *Kitamura* (1997) καθιέρωσε τις συνθήκες για τον έλεγχο τέτοιων «*nonnested*» υποθέσεων για την περίπτωση όπου και f και g είναι διαφοροποιήσιμα. Εξαιτίας της συνάρτησης-δείκτη, η ιδιότητα της διαφοροποιησιμότητας παραβιάζεται στην εφαρμογή των *Christoffersen, Hahn, Inoue* (1999). Για αυτό το λόγο γενικεύουν το αποτέλεσμα του *Kitamura* (1997) και λαμβάνουν τα εξής αποτελέσματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση ότι $M(\beta^*, \gamma^*) = N(\theta^*, \lambda^*)$ ισχύει

$$\sqrt{T}(M_T(\hat{\beta}_T, \hat{\gamma}_T) - N_T(\hat{\theta}_T, \hat{\lambda}_T)) \rightarrow N(0, \sigma_\infty^2), \quad (\text{V.16})$$

όπου

$$\sigma_\infty^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} Var \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \exp \left[\gamma^{*'} f(x_t, \beta^*) \right] - \exp \left[\lambda^{*'} g(x_t, \theta^*) \right] \right). \quad (\text{V.17})$$

Σαν αποτέλεσμα, μια σημαντικά μεγάλη αξία της στατιστικής ελέγχου θα οδηγήσει στην απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, ότι οι δύο εκτιμήσεις πληρούν τη συνθήκη αποτελεσματικότητας VaR εξίσου καλά προς όφελος του υποδείγματος VaR της μορφής $E[g(x, \theta^*)] = 0$.

2.3. ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ VaR

Για λόγους απλότητας οι *Christoffersen, Hahn, Inoue (1999)*, επικεντρώνονται στο γραμμικό συνδυασμό των εκτιμήσεων *VaR*. Συνδυάζουν τις ακόλουθες n *VaR* εκτιμήσεις:

$$\Pr(y_t \leq F_{t|t-1}^{(i)}(\beta_p^{(i)}) | \Psi_{t-1}^{(i)}) = p, \quad (\text{V.18})$$

για $i = 1, 2, \dots, n$. Και $\beta = (\beta_p^{(1)}, \beta_p^{(2)}, \dots, \beta_p^{(n)})$, $\pi(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ και $\Psi_{t-1} = \bigcap_{i=1}^n \Psi_{t-1}^{(i)}$.

Ορίζουν τη συνδυασμένη εκτίμηση *VaR* ως

$$F_{t|t-1}(\beta, \pi) = \pi_0 + \sum_{i=1}^n \pi_i F_{t|t-1}^{(i)}(\beta_p^{(i)}). \quad (\text{V.19})$$

Σημειώνουμε ότι εάν κάποια από τις εκτιμήσεις *VaR* είναι ορθά εξειδικευμένη, τότε

$$\Pr(y_t \leq F_{t|t-1}(\beta, \pi) | \Psi_{t-1}) = p \quad (\text{V.20})$$

και κάποιο τυχαίο π . Εάν καμία από τις εκτιμήσεις *VaR* δεν είναι ορθά εξειδικευμένες, τότε είναι πιθανόν κάποιος γραμμικός συνδυασμός να είναι καλύτερος από όλες τις μεμονωμένες εκτιμήσεις *VaR*. Νωρίτερα γράψαμε τη συνθήκη ροπών ως

$$E[(I(y_t \leq F_{t|t-1}(\beta, \pi)) - p) \times k(z_{t-1})] = 0 \quad (\text{V.6})$$

το οποίο σε πιο απλή μορφή μπορεί να γραφεί ως

$$E[f(z, \beta, \pi)] = 0. \quad (\text{V.21})$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε το π ως μέρος του διανύσματος των παραμέτρων στη συνθήκη των ροπών. Συνεπώς τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα κάτω από το Θεώρημα

I ισχύουν και πάλι. Η συνδυαστική εκτίμηση VaR είναι βέλτιστη με την έννοια ότι ελαχιστοποιεί την απόσταση *Kullback-Leibler* στον πληθυσμό.

3.ΔΟΜΗ ΓΙΑ ΕΛΕΓΧΟ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΚΑΛΥΨΗΣ

3.1. ΚΑΘΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΕΝΑ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΛΕΓΧΟΥ

Ο *Christoffersen (1998)* στο άρθρο του θέτει ως στόχο τον καθορισμό ενός γενικού κριτηρίου για την ορθότητα ενός εκτός-δείγματος διαστήματος πρόβλεψης για μια δοθείσα χρονολογική σειρά. Σκοπός του άρθρου του είναι να αναπτύξει ελέγχους για τη μεθοδολογία πρόβλεψης που εφαρμόζεται.

Οι αρχές της ανάλυσης του είναι οι ακόλουθες: παρατηρούμε το δείγμα της χρονολογικής σειράς y_t , $\{y_t\}_{t=1}^T$. Έχουμε επιπλέον διαθέσιμη μια αντίστοιχη αλληλουχία διαστημάτων πρόβλεψης εκτός δείγματος, $\{(L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p))\}_{t=1}^T$, όπου $L_{t|t-1}(p)$ και $U_{t|t-1}(p)$ είναι το χαμηλότερο και το υψηλότερο όριο της εκ των προτέρων πρόβλεψης διαστήματος για το χρόνο t , τη χρονική στιγμή $t-1$ για την πιθανότητα κάλυψης, p . Δοθέντων των παρατηρήσεων των χρονολογικών σειρών και των προβλέψεων διαστήματος, η μεταβλητή δείκτης καθορίζεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: η μεταβλητή δείκτης, I_t , για μια δοθείσα πρόβλεψη διαστήματος, $(L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p))$ για το χρόνο t , η οποία γίνεται τη χρονική στιγμή $t-1$ ορίζεται ως,

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{if } y_t \in [L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p)] \\ 0, & \text{if } y_t \notin [L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p)] \end{cases}. \quad (\text{V.22})$$

Βασισμένος στον παραπάνω ορισμό ο *Christoffersen (1998)* θέτει το γενικό κριτήριο ελέγχου για την πρόβλεψη διαστήματος ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 3: η ακολουθία των προβλέψεων διαστήματος, $\{(L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p))\}_{t=1}^T$, είναι ικανή (αποτελεσματική-*efficient*) σε σχέση με το σύνολο πληροφόρησης Ψ_{t-1} , εάν ισχύει $E[I_t | \Psi_{t-1}] = p$, για όλα τα t .

Στον ορισμό της δεσμευμένης αποτελεσματικότητας η μεταβλητή-δείκτης συνδυάζεται με ένα γενικό δεσμευμένο σύνολο. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει στον

Christoffersen (1998) να διαμορφώσει ελέγχους για τις προβλέψεις διαστήματος χωρίς να βασίζεται σε υποθέσεις για την κατανομή των σειρών που γίνεται η πρόβλεψη. Αυτό είναι πολύ σημαντικό για τις περισσότερες οικονομικές εφαρμογές όπου υποθέσεις για οποιαδήποτε μορφής κατανομή είναι αμφισβητήσιμη. Στις εφαρμογές της *VaR* οι χρονολογικές σειρές των αποδόσεων είναι μη στάσιμες από κατασκευής τους, για αυτό το λόγο το χαρτοφυλάκιο μεταβάλλεται στο χρόνο. Επιπλέον, οι προβλέψεις της *VaR* συχνά χαρακτηρίζονται από λανθασμένο προσδιορισμό υποδείγματος εξαιτίας της μεταβλητότητας στο χρόνο των διακυμάνσεων και των προσεγγίσεων του ρίσκου των options, για αυτό το λόγο είναι ουσιώδες τα υποδείγματα τα μην έχουν υποθέσεις κατανομών.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η τυπική αξιολόγηση των προβλέψεων διαστήματος πραγματοποιείται από την απλή σύγκριση της ονομαστικής κάλυψης, $\sum_{t=1}^T I_t / T$ με την πραγματική κάλυψη p . Στη δομή που παρουσιάζει ο *Christoffersen (1998)*, η παραπάνω σύγκριση αντιστοιχεί στον έλεγχο για δεσμευμένη αποτελεσματικότητα σε σχέση με το μηδενικό σύνολο πληροφόρησης, $\Psi_{t-1} = \emptyset$. Δηλαδή, γίνεται ελέγχεται εάν ισχύει $E[I_t] = p$ για όλα τα t . Αυτή είναι μια μη-δεσμευμένη υπόθεση και δε λαμβάνει υπόψη της την παρουσία δυναμικότητας (*dynamics*) μεγαλύτερου βαθμού.

Οι εκτιμήσεις της *VaR* στο άρθρο του *Christoffersen (1998)* αναφέρονται ως προβλέψεις διαστήματος, όπου τα διαστήματα αφορούν στην μία μόνο πλευρά της κατανομής. Με τον όρο μονόπλευρα ή ανοικτά διαστήματα ο *Christoffersen (1998)* εννοεί ότι το διάστημα $(L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p))$ ισούται είτε με το διάστημα $(L_{t|t-1}(p), +\infty)$ είτε με το διάστημα $(-\infty, U_{t|t-1}(p))$. Έχοντας κατάλληλα ορίσει τους παραπάνω όρους η ανάλυση διαστημάτων που αφορούν στη μία μόνο πλευρά της κατανομής αντιστοιχεί ακριβώς στην ανάλυση διαστημάτων που αφορούν και στις δύο πλευρές.

3.2. ΈΝΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΛΕΓΧΟΥ

Ο *Christoffersen (1998)* θέλει να κάνει το κριτήριο για προβλέψεις διαστήματος εκτός-δείγματος λειτουργικό, και να αναπτύξει εύκολα εφαρμόσιμες διαδικασίες ελέγχου. Για να κατασκευάσει έναν άμεσα εφαρμόσιμο έλεγχο θεωρεί το ακόλουθο σύνολο πληροφόρησης της αλληλουχίας της μεταβλητής-δείκτη, το οποίο αποτελείται από παρατηρήσεις προηγούμενων περιόδων, $\Psi_t = \{I_{t-1}, I_{t-2}, I_{t-3}, \dots, I_1\}$. Εύκολα καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα.

ΛΗΜΜΑ 1: ο έλεγχος $E[I_t | \Psi_t] = E[I_t | I_{t-1}, I_{t-2}, I_{t-3}, \dots, I_1] = p$, για όλα τα t , ισοδυναμεί με τον έλεγχο ότι η αλληλουχία $\{I_t\}$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένη σύμφωνα με την κατανομή Bernoulli με παράμετρο p ($I_t \stackrel{iid}{\sim} Bern(p)$).

Για περισσότερη ακρίβεια ο Christoffersen (1998) σημειώνει τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 4: μια αλληλουχία προβλέψεων διαστήματος, $\{(L_{it-1}(p), U_{it-1}(p))\}_{i=1}^T$, έχει σωστή δεσμευμένη κάλυψη εάν ισχύει $\{I_t\} \stackrel{iid}{\sim} Bern(p)$, $\forall t$.

Έστω ότι έχουμε μια δοθείσα αλληλουχία προβλέψεων διαστήματος. Η αλληλουχία μπορεί να παραχθεί από παραμετρικό ή μη-παραμετρικό υπόδειγμα χρονολογικών σειρών, ή να αποτελείται ολόκληρη από κριτικές προβλέψεις ή οτιδήποτε άλλο. Η ιδέα είναι να γίνει έλεγχος για την υπόθεση της ανεξάρτητης και ισόνομα κατανεμημένης αλληλουχίας των προβλέψεων διαστήματος, με στόχο να λάβουμε μια ένδειξη του πόσο κοντά βρίσκεται η πραγματική κάλυψη με την ακριβή δεσμευμένη κάλυψη.

4. ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΚΑΛΥΨΗΣ

4.1. Ο LR ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΜΗ-ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΚΑΛΥΨΗ

Έστω η αλληλουχία $\{I_t\}_{t=1}^T$, η οποία προέρχεται από μία δοθείσα πρόβλεψη διαστήματος. Για να ελέγξουμε για μη-δεσμευμένη κάλυψη, η υπόθεση ότι $E[I_t] = p$ πρέπει να ελεγχθεί σε σχέση με την εναλλακτική $E[I_t] \neq p$, δοθείσας της ιδιότητας της ανεξαρτησίας. Η πιθανότητα κάτω από τη μηδενική υπόθεση είναι:

$$L(p; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1-p)^{n_0} p^{n_1}, \quad (\text{V.23})$$

και κάτω από την εναλλακτική υπόθεση:

$$L(\pi; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi)^{n_0} \pi^{n_1}. \quad (\text{V.24})$$

Ο έλεγχος για τη μη-δεσμευμένη κάλυψη μπορεί να διατυπωθεί ως ο τυποποιημένος έλεγχος του λόγου πιθανότητας (*standard likelihood ratio test*),

$$LR_{uc} = -2 \log [L(p; I_1, I_2, \dots, I_T) / L(\hat{\pi}; I_1, I_2, \dots, I_T)] \stackrel{asy}{\sim} \chi^2(s-1) = \chi^2(1), \quad (\text{V.25})$$

όπου $\hat{\pi} = n_1 / (n_0 + n_1)$ είναι η εκτίμηση της μέγιστης πιθανοφάνειας του π , και $s=2$ είναι ο αριθμός των πιθανών αποτελεσμάτων της αλληλουχίας.

Αυτή η διαδικασία ελέγχει την κάλυψη του διαστήματος αλλά δεν έχει δύναμη ενάντια στην εναλλακτική ότι τα μηδενικά και οι μονάδες βρίσκονται συγκεντρωμένα σε ομάδες με τρόπο που εξαρτάται από το χρόνο. Στον παραπάνω έλεγχο, η σειρά των μηδενικών και των μονάδων δεν έχει καμία σημασία στην αλληλουχία των $\{I_t\}_{t=1}^T$, μονό ο συνολικός αριθμός των μονάδων παίζει κάποιο ρόλο.

Ο απλός έλεγχος για την ορθή μη-δεσμευμένη κάλυψη είναι ανεπαρκής όταν παρουσιάζονται δυναμικότητες (*dynamics*) στις μεγαλύτερου βαθμού ροπές. Οι δύο έλεγχοι που ακολουθούν διορθώνουν αυτό το ελάττωμα. Ο πρώτος ελέγχει την υπόθεση ανεξαρτησίας και ο δεύτερος ελέγχει συνδυαστικά για ανεξαρτησία και ορθή κάλυψη, προσφέροντας με αυτόν τον τρόπο έναν πλήρη έλεγχο για ορθή δεσμευμένη κάλυψη.

4.2. Ο LR ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Η υπόθεση της ανεξαρτησίας ελέγχεται ενάντια στην εναλλακτική υπόθεση του *Markov* πρώτου βαθμού. Έστω μια δυαδική αλυσίδα του *Markov* πρώτου βαθμού, $\{I_t\}$, με μήτρα πιθανοτήτων (*transition*):

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix}, \quad (\text{V.26})$$

όπου $\pi_{ij} = \Pr(I_t = j | I_{t-1} = i)$. Η κατά προσέγγιση συνάρτηση πιθανότητας για αυτή τη διαδικασία είναι:

$$L(\Pi_1; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}, \quad (\text{V.27})$$

όπου n_{ij} είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων αξίας i ακολουθούμενες από αυτές αξίας j . Έπειτα εύκολα μεγιστοποιούμε τη λογαριθμική συνάρτηση και λύνουμε ως προς τις παραμέτρους, που είναι απλά οι λόγοι της αρίθμησης των κατάλληλων κελιών:

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} \frac{n_{00}}{n_{00} + n_{01}} & \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} \\ \frac{n_{10}}{n_{10} + n_{11}} & \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}} \end{bmatrix}. \quad (\text{V.28})$$

Έστω μια αλληλουχία $\{I_t\}$, από ένα υπόδειγμα διαστήματος. Ο Christoffersen (1998) εκτιμά ένα υπόδειγμα αλυσίδας του Markov πρώτου βαθμού, και ελέγχει την υπόθεση ανεξαρτησίας της αλληλουχίας παρατηρώντας ότι

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_2 & \pi_2 \\ 1 - \pi_2 & \pi_2 \end{bmatrix} \quad (\text{V.29})$$

αντιστοιχεί σε ανεξαρτησία. Η πιθανότητα κάτω από τη μηδενική υπόθεση γίνεται

$$L(\Pi_2; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi_2)^{(n_{00} + n_{10})} \pi_2^{(n_{01} + n_{11})}, \quad (\text{V.30})$$

και η εκτίμηση της μεγίστης πιθανοφάνειας (ML) είναι

$$\hat{\Pi}_2 = \hat{\pi}_2 = (n_{01} + n_{11}) / (n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11}).$$

Από τον Hoel (1954) έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα: ο έλεγχος LR για ανεξαρτησία κατανέμεται ασυμπτωτικά ως χ^2 με $(s-1)^2$ βαθμούς ελευθερίας

$$LR_{ind} = -2 \log [L(\hat{\Pi}_2; I_1, I_2, \dots, I_T) / L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_T)] \stackrel{asy}{\sim} \chi^2((s-1)^2) = \chi^2(1). \quad (\text{V.31})$$

Και πάλι ο Christoffersen (1998) δουλεύει με μια δυαδική αλληλουχία, έτσι $s=2$. Ας σημειώσουμε ότι αυτός ο έλεγχος δεν εξαρτάται από την πραγματική κάλυψη p , και για αυτόν το λόγο ελέγχει μόνο το τμήμα της ανεξαρτησίας της υπόθεσης του Christoffersen (1998).

4.3. ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΛΥΨΗΣ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ

Σε αυτό το σημείο η μηδενική υπόθεση του ελέγχου για μη-δεσμευμένη κάλυψη ελέγχεται σε σχέση με την εναλλακτική του ελέγχου για ανεξαρτησία. Συνεπώς, χρειάζεται να υπολογίσουμε την κατανομή

$$LR_{cc} = -2 \log \left[L(p; I_1, I_2, \dots, I_T) / L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_T) \right]. \quad (\text{V.32})$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: η κατανομή των ελέγχου LR για δεσμευμένη κάλυψη είναι ασυμπτωτικά η χ^2 με βαθμούς ελευθερίας $s(s-1)$

$$LR_{cc} = -2 \log \left[L(p; I_1, I_2, \dots, I_T) / L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_T) \right] \stackrel{asy}{\sim} \chi^2(s(s-1)) = \chi^2(2). \quad (\text{V.33})$$

Εάν αγνοήσουμε την πρώτη παρατήρηση οι τρείς έλεγχοι LR σχετίζονται με την ακόλουθη ταυτότητα,

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}. \quad (\text{V.34})$$

5. ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΙΚΗ ΔΟΜΗ

5.1. ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Η επέκταση της διαδικασίας για τον έλεγχο πολυμεταβλητών προβλέψεων δεν παρουσιάζει κάποια δυσκολία κατανόησης σύμφωνα με τον Christoffersen (1998). Έστω ένα δείγμα χρονολογικής σειράς με m -μεταβλητές, $\{Y_t\}_{t=1}^T$, και μια αλληλουχία region προβλέψεων εκτός δείγματος,

$$\{R_{t|t-1}(p)\}_{t=1}^T, \quad (\text{V.35})$$

όπου η επιθυμητή κάλυψη, p , της περιοχής (region) είναι προκαθορισμένη. $R_{t|t-1}(p) \in \mathbb{R}^m$ είναι η πρόβλεψη περιοχής (region) για το χρόνο t , τη στιγμή $t-1$. Ορίζουμε τη μεταβλητή-δείκτη I_t ,

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{if } Y_t \in R_{i|t-1}(p) \\ 0, & \text{if } Y_t \notin R_{i|t-1}(p) \end{cases}. \quad (\text{V.36})$$

Η διαδικασία ελέγχου για την πολυματαβλητή περίπτωση είναι η ίδια με την μονομεταβλητή. Ένα πρακτικό ζήτημα που προκύπτει είναι ότι οι προβλέψεις περιοχής είναι δύσκολο να υπολογιστούν και να εφαρμοστούν. Για αυτό το λόγο πολλοί ανατρέχουν στην μέθοδο *Bonferroni* για την κατασκευή των συνδυαστικών προβλέψεων περιοχών. Αυτή η μέθοδος ενώνει *m* ατομικές προβλέψεις διαστήματος (μία για κάθε χρονολογική σειρά), $\{(L_{i,t|t-1}(1-\tau), U_{i,t|t-1}(1-\tau))\}_{i=1}^m$ όπου $\tau = (1-p)/m$, σε μία συντηρητική συνδυαστική πρόβλεψη περιοχής. Σαν αποτέλεσμα η συνδυαστική πρόβλεψη περιοχής έχει κάλυψη τουλάχιστον p ,

$$\Pr(Y_i \in (L_{1,t|t-1}(1-\tau), U_{1,t|t-1}(1-\tau)) \times \cdots \times (L_{m,t|t-1}(1-\tau), U_{m,t|t-1}(1-\tau))) \geq 1 - m\tau = p. \quad (\text{V.37})$$

Από την οπτική γωνία της αξιολόγησης, η μέθοδος του *Bonferroni* (*Bonferroni's bands*) είναι πολύ σημαντική για τη μέθοδο του *Christoffersen* (1998), στο ότι του επιτρέπει να λάβει υπόψη του και μεμονωμένους ελέγχους ανεξαρτησίας και κάλυψης. Εφόσον η κάλυψη στις περισσότερες περιπτώσεις θα είναι λανθασμένη, ο *Christoffersen* (1998) κάνει τον έλεγχο για ανεξαρτησία χωριστά από τον έλεγχο για κάλυψη. Για αυτό το σκοπό είναι πολύ χρήσιμος ο έλεγχος LR_{ind} . Η απόρριψη της πρόβλεψης περιοχής του *Bonferroni* στον LR_{cc} έλεγχο δεν οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η πρόβλεψη είναι κακή, αλλά στην απόρριψη της υπόθεσης ότι η κάλυψη είναι πολύ μεγάλη.

5.2. ΈΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΙΣ ΟΥΡΕΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Στους προηγούμενους ελέγχους ο *Christoffersen* (1998) δεν κάνει ξεκάθαρο εάν οι παρατηρήσεις (*realizations*) που είναι εκτός του διαστήματος πρόβλεψης βρίσκονται στο χαμηλότερο ή στο υψηλότερο σημείο της ουράς της δεσμευμένης κατανομής. Εάν η δεσμευμένη κατανομή είναι συμμετρική και τα διαστήματα πρόβλεψης είναι συμμετρικά, δεν είναι κρίσιμο (*critical*). Από την άλλη πλευρά, εάν κάποιος ενδιαφέρεται για τη βαθμονόμηση (μέτρηση) κάθε ουράς ξεχωριστά, ή θέλει μη-συμμετρικά διαστήματα, απαιτείται η ακόλουθη γενίκευση της δομής.

Έστω ότι a_l και a_u είναι χαμηλότερη και υψηλότερη επιθυμητή πιθανότητα της ουράς αντίστοιχα. Τότε ενώ προηγουμένως ίσχυε ότι $1-p = a_l + a_u$, τώρα ισχύει ότι $a_l = a_u = (1-p)/2$. Ο Christoffersen (1998) ορίζει

$$S_t = \begin{cases} 1, & \text{if } y_t \leq L_{t|t-1}(a_l) \\ 2, & \text{if } L_{t|t-1}(a_l) < y_t < U_{t|t-1}(a_u) \\ 3, & \text{if } y_t \geq U_{t|t-1}(a_u) \end{cases} \quad (\text{V.38})$$

κάτω από τη μηδενική υπόθεση ότι η πρόβλεψη διαστήματος είναι ορθά υπολογισμένη, η μεταβατική μήτρα για το S_t είναι

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} a_l & 1-a_l-a_u & a_u \\ a_l & 1-a_l-a_u & a_u \\ a_l & 1-a_l-a_u & a_u \end{bmatrix}, \quad (\text{V.39})$$

η εναλλακτική της ανεξαρτησίας, αλλά λανθασμένη κάλυψη είναι

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} \pi_l & 1-\pi_l-\pi_u & \pi_u \\ \pi_l & 1-\pi_l-\pi_u & \pi_u \\ \pi_l & 1-\pi_l-\pi_u & \pi_u \end{bmatrix}, \quad (\text{V.40})$$

η πλήρης εναλλακτική που λαμβάνει υπόψη της την εξάρτηση 1^ο βαθμού και τη μη-ορθή κάλυψη είναι

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{ll} & 1-\pi_{ll}-\pi_{uu} & \pi_{uu} \\ \pi_{ll} & 1-\pi_{ll}-\pi_{uu} & \pi_{uu} \\ \pi_{ll} & 1-\pi_{ll}-\pi_{uu} & \pi_{uu} \end{bmatrix}. \quad (\text{V.41})$$

Οι τρείς LR έλεγχοι μπορούν και πάλι να χρησιμοποιηθούν. Ο έλεγχος για μη-δεσμευμένη κάλυψη είναι

$$LR_{uc} = -2 \log [L(\Pi_0; S_1, S_2, \dots, S_T) / L(\hat{\Pi}_2; S_1, S_2, \dots, S_T)] \stackrel{asy}{\sim} \chi^2(s-1) = \chi^2(2), \quad (\text{V.42})$$

όπου $s=3$ είναι ο αριθμός των καταστάσεων (*states*). Ο έλεγχος για ανεξαρτησία είναι

$$LR_{ind} = -2 \log [L(\hat{\Pi}_2; S_1, S_2, \dots, S_T) / L(\hat{\Pi}_1; S_1, S_2, \dots, S_T)] \stackrel{asy}{\sim} \chi^2((s-1)^2) = \chi^2(4). \quad (\text{V.43})$$

Και ο έλεγχος για τη δεσμευμένη κάλυψη είναι

$$LR_{cc} = -2 \log [L(\Pi_0; S_1, S_2, \dots, S_T) / L(\hat{\Pi}_1; S_1, S_2, \dots, S_T)] \stackrel{asy}{\sim} \chi^2(s(s-1)) = \chi^2(6). \quad (\text{V.44})$$

Οι Christoffersen, Hahn, Inoue (1999) στο άρθρο τους απαντούν στις ακόλουθες ερωτήσεις:

- 4) Διθείσας της εκτίμησης *VaR*, πώς μπορεί ο διαχειριστής του κινδύνου να ελέγξει ότι η συγκεκριμένη μέτρηση έχει προσδιοριστεί κατάλληλα.
- 5) Έστω ότι έχουμε δύο εκτιμήσεις της *VaR*, μία μέσω χρήσης ενός *GARCH* υποδείγματος και μία μέσω χρήσης της «*implied*» διακύμανσης, πώς μπορεί ο διαχειριστής του κινδύνου να τις συγκρίνει και να επιλέξει την καλύτερη σύμφωνα με στατιστικά κριτήρια.
- 6) Πώς μπορεί ο διαχειριστής του κινδύνου να μελετήσει την πιθανότητα συνδυασμού δύο ή περισσοτέρων διαφορετικών τρόπων υπολογισμού της *VaR* με στόχο να αποκτήσει μία στατιστικά μοναδική βέλτιστη εκτίμηση.

5.3. ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΡΟΠΩΝ

Εάν οι αποδόσεις που κανονικοποιούνται με τη χρήση της δεσμευμένης μέσης απόδοσης και έναν μετασχηματισμό της διακύμανσής τους, $(y_t - \mu_t)/\xi(\sigma_t)$, δεν κατανέμονται ανεξάρτητα και ισόνομα, τότε η διακύμανση δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό του δεσμευμένου ποσοστιαίου σημείου. Τυπικά, σύμφωνα με τους Christoffersen, Hahn, Inoue (1999), γίνεται έμμεσα η υπόθεση ότι οι τυποποιημένες αποδόσεις, $(y_t - \mu_t)/\xi(\sigma_t)$, κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα (δηλαδή τα y_t ανήκουν σε μια *location-scale* οικογένεια). Αυτή η υπόθεση συνεπάγεται ότι το δεσμευμένο ποσοστιαίο σημείο (*conditional quantile*) είναι.

6. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΣ ΑΠΩΛΕΙΑΣ

Η ιδέα της χρήσης των συναρτήσεων απώλειας ως μέσο αξιολόγησης των υποδειγμάτων *VaR* διατυπώθηκε από τον Lopez (1998, 1999). Στην προσέγγισή του



οι συναρτήσεις απώλειας ορίζονται με έναν αρνητικό προσανατολισμό, δηλαδή δίνουν μεγαλύτερες τιμές (αποτελέσματα) όταν το υπόδειγμα που αξιολογείται αποτυγχάνει. Με αυτόν τον τρόπο τα υποδείγματα *VaR* αξιολογούνται συγκρίνοντας τις τιμές που δίνουν οι συναρτήσεις απώλειας. Προηγείται, με αυτό το κριτήριο, το υπόδειγμα που ελαχιστοποιεί την απώλεια.

Ας θεωρήσουμε την απλούστερη μορφή συνάρτησης απώλειας- τη δυωνυμική συνάρτηση απώλειας. Σε αυτή τη συνάρτηση ο αριθμός μηδέν προσθέτεται όταν $I_t = 0$ (δηλ. όταν μια επιτυχία πραγματοποιείται) και ο αριθμός 1 προσθέτεται όταν $I_t = 1$ (δηλ. όταν μια αποτυχία πραγματοποιείται). Σαν αποτέλεσμα, είναι ακριβώς το ίδιο σαν να υπολογίζαμε τη μη-δεσμευμένη κάλυψη στον έλεγχο του *Christoffersen (1998)*. Παρόλα αυτά είναι δύσκολο να θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένας οικονομικός αναλυτής που να έχει μια συνάρτηση απώλειας τέτοιας μορφής. Δηλαδή, μια συνάρτηση που να είναι ουδέτερη προς όλα τα γεγονότα όπου ισχύει $I_t = 0$, και να αυξάνει απότομα σε $I_t = 1$ στην εμφάνιση οποιασδήποτε αποτυχίας (δηλ. να «τιμωρεί» όλες τις αποτυχίες εξίσου).

Για αυτό το λόγο ο *Lopez (1998, 1999)* προτείνει τρεις συναρτήσεις απώλειας που πιθανόν να αντανακλούν τη συνάρτηση χρησιμότητας ενός ρυθμιστή. Αυτές είναι η δυωνυμική συνάρτηση απώλειας, η συνάρτηση απώλειας μεγέθους (*magnitude*) και η συνάρτηση απώλειας ζώνης (*zone*). Οι τελευταίες δύο συναρτήσεις «τιμωρούν» πιο αυστηρά τις αποτυχίες από ότι η δυωνυμική.

Ο προσδιορισμός μιας συγκεκριμένης μορφής της συνάρτησης απώλειας εμφανίζει δυσκολίες. Όπως και σε άλλες εφαρμογές της στατιστικής θεωρίας αποφάσεων, η συνάρτηση απώλειας εμπεριέχει το στοιχείο της τύχης όσον αφορά στον προσδιορισμό της. Στο άρθρο τους οι *Sarma, Tomas και Shah (2003)* προσδιορίζουν τη «ρυθμιστική συνάρτηση απώλειας- regulatory loss function» αντανακλώντας τη συνάρτηση απώλειας του ρυθμιστή και τη «συνάρτηση απώλειας της εταιρείας- firm's loss function» η οποία αντανακλά τη συνάρτηση απώλειας μια επιχείρησης. Η προσέγγιση αυτή είναι επιφρεπής σε λανθασμένη εξειδίκευση της συνάρτησης απώλειας.

6.1. ΡΥΘΜΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΠΩΛΕΙΑΣ (RLF)

Η ρυθμιστική συνάρτηση απώλειας που χρησιμοποιούν οι *Sarma, Tomas και Shah (2003)* είναι όμοια με τη «συνάρτηση απώλειας μεγέθους» του *Lopez (1998)*.

«Τιμωρεί» τις αποτυχίες διαφορετικά από τη δυνωνυμική συνάρτηση απώλειας, και εστιάζει την προσοχή της στο μέγεθος της αποτυχίας.

$$l_t = \begin{cases} (r_t - v_t)^2 & \text{if } r_t < v_t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{V.45})$$

Ο τετραγωνικός όρος στην προηγούμενη συνάρτηση απώλειας εξασφαλίζει ότι μεγάλες αποτυχίες «τιμωρούνται» περισσότερο από άλλες μικρότερες.

6.2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΠΩΛΕΙΑΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ (FLF)

Οι επιχειρήσεις χρησιμοποιούν τη *VaR* στην εσωτερική διαχείριση κινδύνου. Υπάρχει μια διαμάχη ανάμεσα στο στόχο για ασφάλεια και σε αυτόν για τη μεγιστοποίηση του κέρδους. Όταν η εκτίμηση της *VaR* δίνει υπερβολικά υψηλές τιμές τότε η επιχείρηση οδηγείται στο να κρατήσει ένα εξίσου υπερβολικά μεγάλο ποσό κεφαλαίου. Αυτό συνεπάγεται και πίεση προς τα πάνω του κόστους ευκαιρίας του κεφαλαίου της επιχείρησης. Οι *Sarma, Tomas και Shah (2003)* προτείνουν τη μοντελοποίηση της συνάρτησης απώλειας μέσω της «τιμωρίας» των αποτυχιών (υπόδειγμα που μοιάζει με το *RLF*) συν επιπλέον «τιμωρία» που θα αντανακλά το κόστος κεφαλαίου.

$$l_t = \begin{cases} (r_t - v_t)^2 & \text{if } r_t < v_t \\ -\alpha v_t & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{V.46})$$

Το α μετρά το κόστος ευκαιρίας του κεφαλαίου.

6.3. ΈΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΕΡΟΧΗ ΚΑΠΟΙΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΚΑΠΟΙΟ ΆΛΛΟ ΣΕ ΟΡΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΠΩΛΕΙΑΣ

Έστω δύο υπόδειγματα *VaR*, υπόδειγμα i και υπόδειγμα j . Η υπεροχή του υποδείγματος i ως προς το υπόδειγμα j σε σχέση με μια συνάρτηση απώλειας μπορεί να ελέγχει κάνοντας έναν μονόπλευρο έλεγχο. Η μηδενική υπόθεση είναι:

$$H_0 : \{\theta = 0\} \quad (\text{V.47})$$

και η μονόπλευρη εναλλακτική είναι:

$$H_1 : \{\theta < 0\}. \quad (\text{V.48})$$

Το θ είναι ο μέσος της κατανομής των z_t , ορίζοντας ως $z_t = l_{it} - l_{jt}$, όπου l_{it} και l_{jt} είναι οι αξίες μιας συγκεκριμένης συνάρτησης απώλειας προερχόμενες από τα υποδείγματα i και j αντίστοιχα, για την ημέρα t . Το z_t είναι η διαφορά απώλειας μεταξύ των υποδειγμάτων i και j τη χρονική στιγμή t . Επομένως αρνητικές τιμές του z_t προσδίδουν υπεροχή του υποδείγματος i από το j .

6.3.1. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

Ορίζουμε μια μεταβλητή-δείκτη

$$\psi_t = \begin{cases} 1 & \text{if } z_t \geq 0 \\ 0 & \text{if } z_t < 0 \end{cases}. \quad (\text{V.49})$$

Η στατιστική-ένδειξη (*sign statistic*) S είναι ο αριθμός των μη-αρνητικών z_t :

$$S_{ij} = \sum_{t=1}^T \psi_t. \quad (\text{V.50})$$

Εάν η z_t είναι *iid*, τότε η κατανομή των S_{ij} είναι η δυναμική με παραμέτρους $(T, 0.5)$ κάτω από τη μηδενική υπόθεση. Για μεγάλα δείγματα, η τυποποιημένη μορφή της στατιστικής-ένδειξη S_{ij} είναι η τυποποιημένη κανονική:

$$S = \frac{S_{ij} - 0.5T}{\sqrt{0.25T}} \sim N(0,1) \text{ ασυμπτωτικά.} \quad (\text{V.51})$$

Η υπόθεση H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5% εάν $S_{ij} \prec -1.66$. Η απόρριψη της H_0 συνεπάγεται ότι το υπόδειγμα i είναι καλύτερο από το υπόδειγμα j σε όρους μιας συγκεκριμένης συνάρτησης απώλειας.

7. ΜΕΤΡΑ ΣΧΕΤΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ (MEASURES OF RELATIVE SIZE AND VARIABILITY)

7.1. ΜΕΣΟ ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ

Σύμφωνα με τους *Bredin* και *Hyde* (2002) ένα μέτρο υπολογισμού του σχετικού μεγέθους των εκτιμήσεων των *VaR*, που προκύπτουν από διάφορα μοντέλα, αποτελεί η στατιστική του μέσου σχετικού σφάλματος (*mean relative bias-MRB*), που προτάθηκε από τον *Hendricks* (1996). Η στατιστική δείχνει το βαθμό στον οποίο διαφορετικά υποδείγματα παράγουν εκτιμήσεις παρόμοιου μέσου όρου μεγέθους. Έστω T χρονικές περίοδοι και N αριθμός υποδειγμάτων που εκτιμούν τη *VaR*, τότε το μέσο σχετικό σφάλμα του υποδείγματος i υπολογίζεται ως:

$$MRB_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{VaR_{it} - \overline{VaR}_i}{\overline{VaR}_i}, \quad (\text{V.52})$$

όπου

$$\overline{VaR}_i = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N VaR_{it}$$

7.2. ΡΙΖΑ ΜΕΣΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΣΧΕΤΙΚΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Ο *Hendricks* (1996) επεκτείνει τη στατιστική του μέσου σχετικού σφάλματος, με στόχο να «πιάσει» και τη διακύμανση των εκτιμήσεων των υποδειγμάτων. Δηλαδή να μετρήσει το βαθμό στον οποίο οι εκτιμήσεις του κινδύνου τείνουν να μεταβάλλονται γύρω από το μέσο όρο τους για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Αυτό το μέτρο, που είναι γνωστό ως η *ρίζα του μέσου τετραγωνικού σχετικού σφάλματος* (*root mean squared relative bias*), υπολογίζεται ως:

$$RMSRB_i = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{VaR_{it} - \overline{VaR}_i}{\overline{VaR}_i} \right)^2}$$

όπου

(V.53)

$$\overline{VaR}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N VaR_{it}$$

7.3. ANNUALIZED PERCENTAGE VOLATILITY

Ένα τρίτο κριτήριο προτείνει ο *Hendricks (1996)* είναι το ποσοστό της ετήσιας διακύμανσης (annualized percentage volatility). Το κριτήριο αυτό απεικονίζει την τάση των εκτιμήσεων του κινδύνου, όσον αφορά σε ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, να κυμαίνονται στο χρόνο. Για κάθε χαρτοφυλάκιο και για κάθε προσέγγιση *VaR*, υπολογίζουμε την ετήσια διακύμανση. Αρχικά, υπολογίζουμε το ποσοστό διαφοροποίησης της τυπικής απόκλισης στις εκτιμήσεις του κινδύνου από μέρα σε μέρα, για όλο το χρονικό διάστημα του δείγματος. Στη συνέχεια, θέτουμε τα αποτελέσματα σε ετήσια βάση πολλαπλασιάζοντας τις τυπικές αποκλίσεις με τη ρίζα του 250 (αριθμός των εργάσιμων ημερών). Και τέλος, κάνουμε τα αποτελέσματα συγκρίσιμα με τις διακυμάνσεις και εξάγουμε συμπεράσματα.

7.4. ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΗΝ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΠΟΛΥΤΗ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ

Το τέταρτο κριτήριο του *Hendricks (1996)* δείχνει το πόσο καλά οι αλλαγές στις εκτιμήσεις του κινδύνου (*VaR*) ανταποκρίνονται στις πραγματικές αλλαγές του κινδύνου του χαρτοφυλακίου, και υπολογίζεται μέσο του συντελεστή συσχέτισης ανάμεσα στις εκτιμήσεις της *VaR* και των απόλυτων τιμών των αποτελεσμάτων. Αυτή η στατιστική έχει δύο πλεονεκτήματα. Αρχικά, δεν επηρεάζεται από την κλίμακα του χαρτοφυλακίου. Και επιπλέον, οι συντελεστές συσχέτισης είναι εύκολο να ερμηνευτούν, παρόλο που ένα τέλειο μέτρο εκτίμησης της *VaR* δε μπορεί να εγγυηθεί έναν συντελεστή συσχέτισης ίσο με τη μονάδα.

8. ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΠΗΓΗ ΤΗΣ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Τα υποδείγματα εκτίμησης του κινδύνου συνήθως απαιτούν μια πληθώρα ενδεχόμενων περιοριστικών υποθέσεων. Γενικά το πρώτο βήμα είναι η επιλογή ενός συνόλου παραγόντων, όπως τα επιτόκια ή οι συναλλαγματικές ισοτιμίες. Αυτοί οι παράγοντες υποτίθεται ότι οδηγούν τις αλλαγές στις τιμές των χρηματοοικονομικών

προϊόντων του χαρτοφυλακίου που μας ενδιαφέρει. Έπειτα, γίνονται οι υποθέσεις για την κατανομή των παραγόντων με στόχο να πραγματοποιηθούν οι προβλέψεις Monte Carlo για τη VaR ή για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Το επόμενο βήμα είναι η διατύπωση ενός υποδείγματος τιμολόγησης για τα χρηματοοικονομικά προϊόντα του χαρτοφυλακίου, που πιθανόν να εξαρτάται από τους παραπάνω παράγοντες. Για παράδειγμα, ο τύπος των *Black & Scholes* (1972) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συσχετίσει τις αλλαγές στα επιτόκια και στα ίδια κεφάλαια με τις αλλαγές στις τιμές των options.

Στην πραγματικότητα κάθε υπόθεση που προσδιορίζει ένα υπόδειγμα γίνεται για "expendiency" και δε συνεπάγεται την ορθότητα ενός υποδείγματος. Για αυτό το λόγο, η απόρριψη της ορθότητας ενός υποδείγματος δεν ικανοποιεί. Είναι σημαντικό να προσδιοριστούν οι πηγές αποτυχίας ενός υποδείγματος.

Η δομή των ελέγχων LR μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαγνωστεί η πηγή της απόρριψης των υποδειγμάτων. Το κλειδί βρίσκεται στη δημιουργία ψευδο-δεδομένων που δε δεσμεύονται με καμία υπόθεση όσον αφορά στην κατανομή τους. Αυτό πραγματοποιείται με τη χρήση της ιστορικής προσομοίωσης σε συνδυασμό με ένα αυθαίρετο υπόδειγμα τιμολόγησης. Συγκρίνοντας τις ιστορικές προσομοιώσεις με τα δεδομένα Monte Carlo (και τα δύο έχουν προκύψει από το ίδιο υπόδειγμα τιμολόγησης), είναι δυνατό να ελεγχθούν οι υποθέσεις κατανομής.

Για να τυποποιήσει τη διαδικασία, ο Berkowitz (1999), ξεκινά γράφοντας τη διαδικασία τιμολόγησης ως: $y_t = p(x_t)$, όπου x είναι το σύνολο των παραγόντων με συνάρτηση κατανομής $f(\cdot)$. Απεικονίζει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τιμών του χαρτοφυλακίου ως $h_{p(f)}(y_t)$, καθιστώντας φανερό ότι αυτή εξαρτάται από τις (πραγματικές) κατανομές των παραγόντων.

Το υπόδειγμα κινδύνου που ελέγχεται είναι τις μορφής $\hat{p}(\hat{f}(\cdot))$, όπου \hat{p}_t είναι το υπόδειγμα τιμολόγησης και $\hat{f}(\cdot)$ είναι μία υποτιθέμενη κατανομή. Και το υπόδειγμα αλλά και η κατανομή μπορεί να μην έχουν επιλεχθεί σωστά. Το πλήρες υπόδειγμα $\hat{p}(\hat{f}(\cdot))$ υπονοεί μια συνολική κατανομή πρόβλεψης $h_{\hat{p}(\hat{f})}(y_t)$. Με μια σειρά δεδομένων κερδών/απωλειών, y_t , το πλήρες υπόδειγμα μπορεί να ελεγχθεί με τη χρήση της μετατροπής Φ^{-1} .

Ο Berkowitz (1999) στο άρθρο του υποθέτει ότι έχει κάνει την παραπάνω διαδικασία και ότι ο έλεγχος LR οδηγεί στην απόρριψη του πλήρους υποδείγματος.

Σε αυτό το σημείο θα ελέγξει εάν οι υποθέσεις για την κατανομή ευθύνονται για την απόρριψη. Και ακολουθεί την εξής διαδικασία:

- i. Παράγει μια σειρά από ψευδο-δεδομένα χρησιμοποιώντας την ιστορική προσομοίωση από ένα υπόδειγμα τιμολόγησης της μορφής $y_{t-i}^* = \hat{p}(x_{t-i})$, $i = 1, \dots, T$. Τα δεδομένα που προκύπτουν εφαρμόζονται (plugged) στο υπόδειγμα τιμολόγησης αντί να γίνουν οι όποιες υποθέσεις για την κατανομή τους.
- ii. Μετατρέπει τα ψευδο-δεδομένα χρησιμοποιώντας προβλέψεις πυκνότητας του πλήρους υποδείγματος κινδύνου, $z_t = \Phi^{-1} \left(\int_{-\infty}^{y_t^*} h_{\hat{p}(\hat{f}(\cdot))}(u) du \right)$.
- iii. Εφαρμόζει τον έλεγχο LR στα πλέον τροποποιημένα δεδομένα, z_t .

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι εάν ο έλεγχος LR απορρίψει τη μηδενική υπόθεση, οι υποθέσεις για την κατανομή είναι στατιστικά λανθασμένες είτε το υπόδειγμα τιμολόγησης είναι ακριβές είτε όχι. Η ακόλουθη πρόταση τυποποιεί την παραπάνω διαπίστωση.

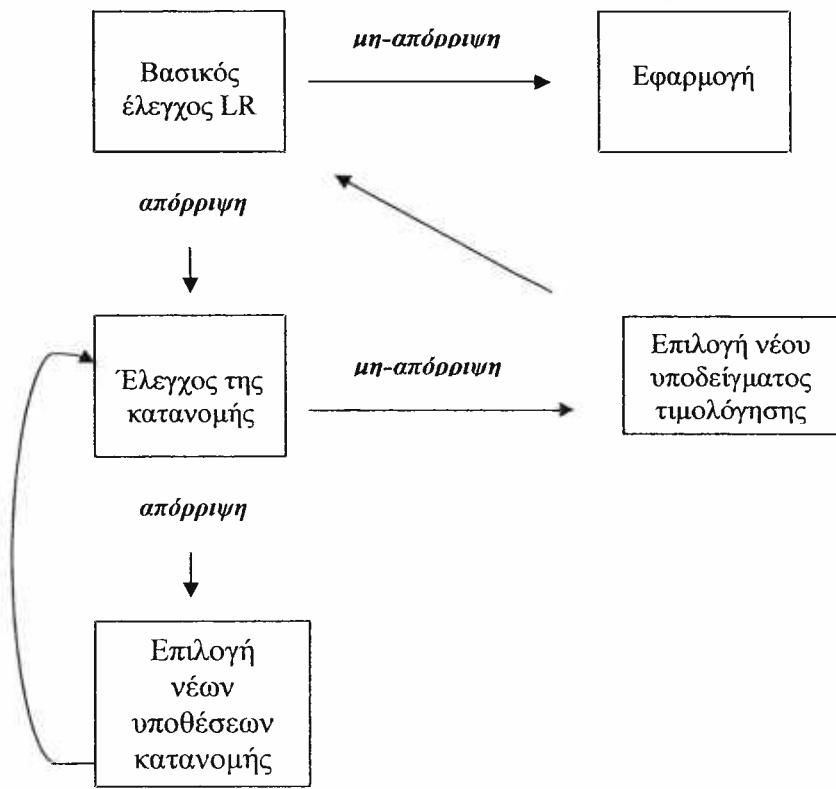
ΠΡΟΤΑΣΗ 2:
(Berkowitz, 1999 σελ. 13) :

Εάν $\hat{f}(\cdot) = f(\cdot)$, τότε τα τροποποιημένα δεδομένα, $\Phi^{-1} \left(\int_{-\infty}^{y_t^*} h_{\hat{p}(\hat{f}(\cdot))}(u) du \right)$ θα κατανέμονται ισόνομα και ανεξάρτητα σύμφωνα με την τυποποιημένη κανονική κατανομή, ανεξάρτητα από το αν το υπόδειγμα τιμολόγησης είναι ορθό ή όχι.

Φυσικά, εάν απορρίψουμε το πλήρες υπόδειγμα αλλά ο έλεγχος LR δεν απορρίψει τη μηδενική υπόθεση για την κατανομή, τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα είναι το υπόδειγμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η απόρριψη και του πλήρους υποδείγματος και των υποθέσεων για την κατανομή δε μας οδηγεί σε άμεσο συμπέρασμα για το υπόδειγμα. Για να ελεγχθεί η ορθότητά του θα πρέπει πρώτα να

γίνει η κατάλληλη επιλογή των υποθέσεων για την κατανομή των δεδομένων. Ο προτεινόμενη ακολουθία ελέγχου παρουσιάζεται και σχηματικά από τον Berkowitz (1999):

ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ



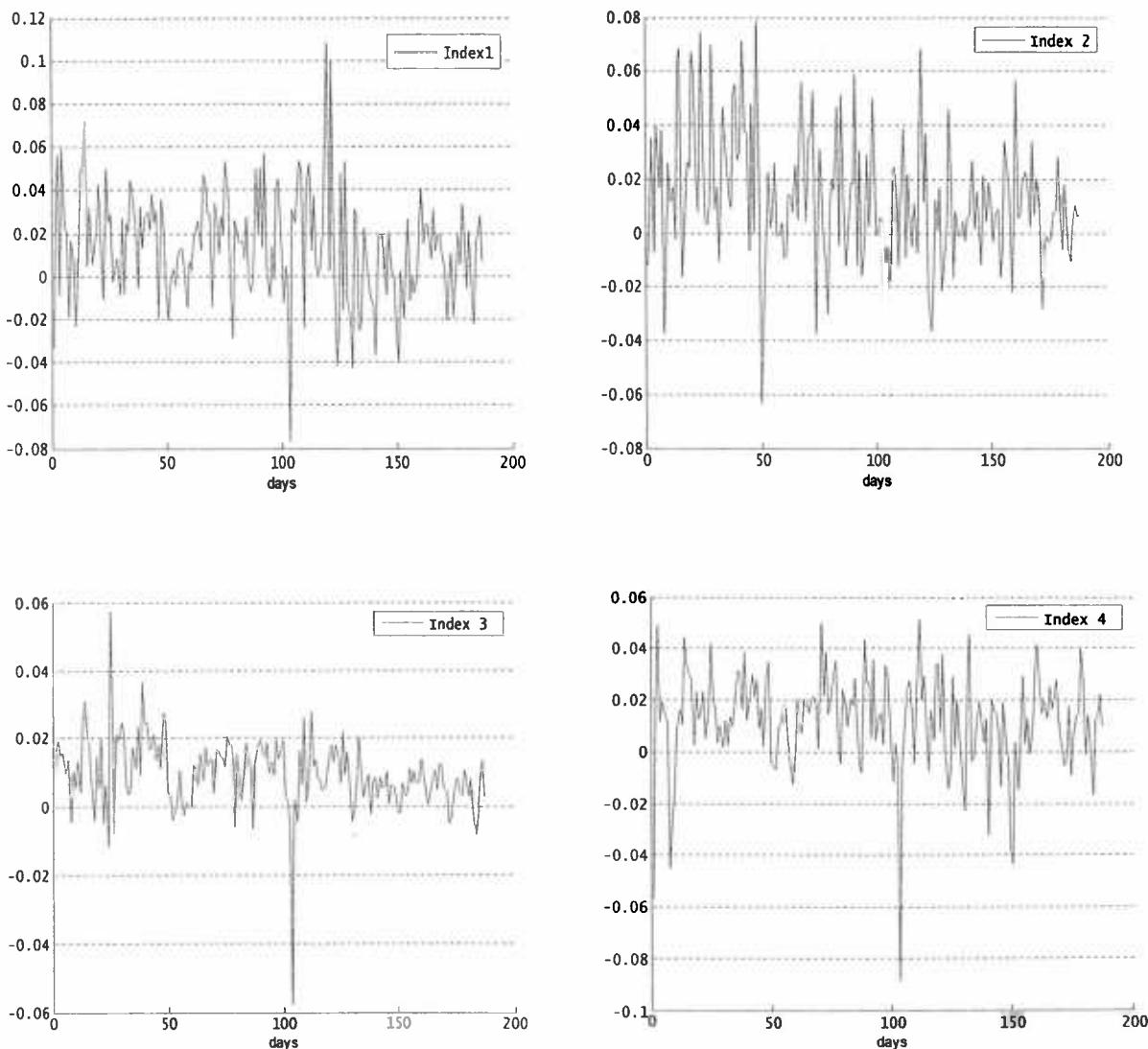
(Berkowitz, 1999)

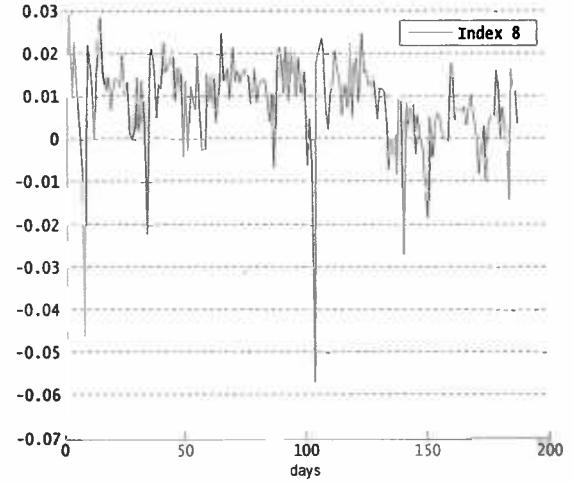
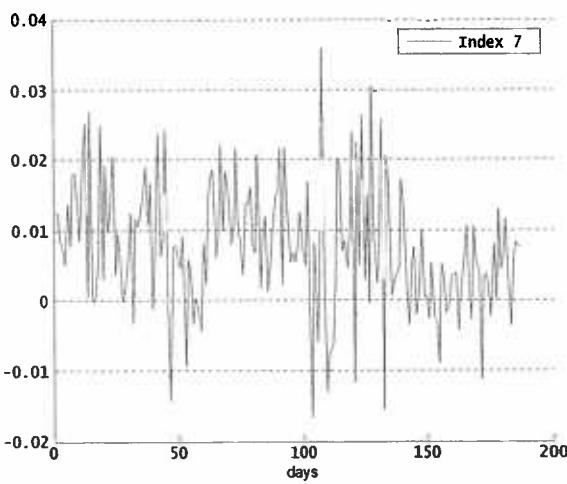
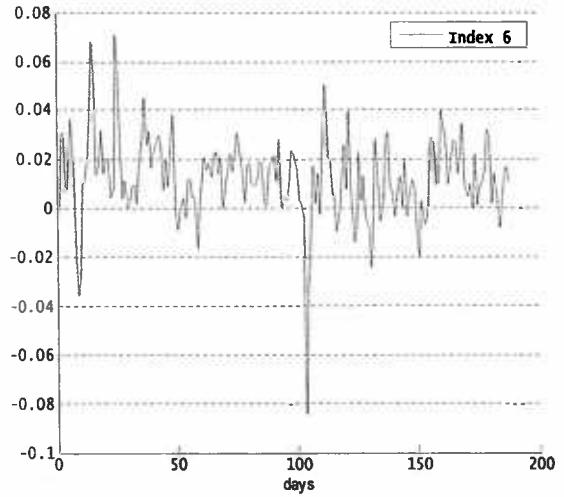
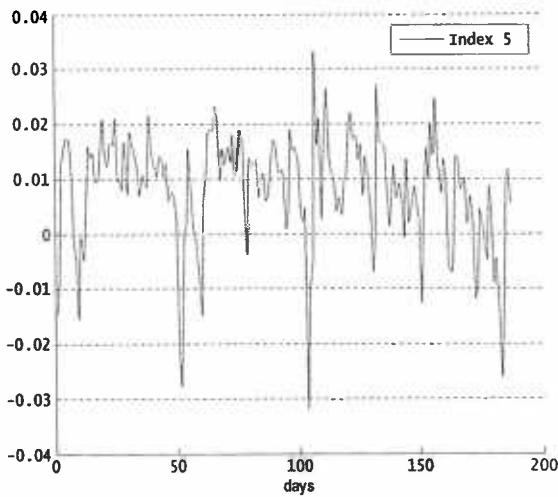
ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το δείγμα των δεδομένων που μελετάμε είναι ημερήσιες αποδόσεις οκτώ δεικτών κεφαλαίων αντιστάθμισης κινδύνου και καλύπτει μία περίοδο που ξεκινά από 1/1990 και τελειώνει 8/2005. Ακολουθούν τα γραφήματα των δεικτών αυτών.

ΓΡΑΦΗΜΑ 1





Ο πίνακας 1 παρουσιάζει τις περιγραφικές στατιστικές των αποδόσεων των οκτώ δεικτών, συγκεκριμένα, το μέσο, τη διάμεσο, την τυπική απόκλιση, την ασυμμετρία, την κύρτωση, την ελάχιστη και τέλος τη μέγιστη τιμή για κάθε δείκτη. Παρατηρούμε ότι οι αποδόσεις των δεικτών εμφανίζουν ετερογένεια. Οι δείκτες 1, 2, 4 και 6 έχουν υψηλές μέσες αποδόσεις και σχετικά υψηλές διακυμάνσεις. Αντίστοιχα, οι δείκτες 3, 5, 7 και 8 έχουν χαμηλές μέσες αποδόσεις και χαμηλές διακυμάνσεις. Διαφορές στους δείκτες παρουσιάζονται και στις ροπές μεγαλύτερου βαθμού. Η κύρτωση των δεικτών κυμαίνεται από 3,3351 έως και 14,2938, υποδηλώνοντας παχιές ουρές στις κατανομές των αποδόσεών τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

	Μέσος	Διάμεσος	Τυπική Απόκλιση	Ασυμμετρία	Κύρτωση	Ελάχιστο	Μέγιστο
Δείκτης 1	0,0136	0,0140	0,0255	0,1860	4,3418	-0,0765	0,1088
Δείκτης 2	0,0125	0,0084	0,0240	0,3512	3,5237	-0,0640	0,0788
Δείκτης 3	0,0095	0,0092	0,0104	-0,8211	13,1459	-0,0580	0,0572
Δείκτης 4	0,0117	0,0136	0,0189	-1,3060	7,6696	-0,0890	0,0513
Δείκτης 5	0,0081	0,0101	0,0103	-1,1127	4,8717	-0,0319	0,0333
Δείκτης 6	0,0121	0,0114	0,0175	-0,6496	8,4758	-0,0850	0,0706
Δείκτης 7	0,0074	0,0066	0,0091	0,1688	3,3351	-0,0167	0,0359
Δείκτης 8	0,0082	0,0104	0,0123	-2,6052	14,2938	-0,0646	0,0290

Η κύρτωση για τους δείκτες 3, 4, 6 και 8 όπου είναι αντίστοιχα 13.1459, 7.6696, 8.4758 και 14.2938 βλέπουμε ότι είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτή της κανονικής κατανομής, που ισούται με 3. Ενώ για του δείκτες 1 και 5 η κύρτωσή τους είναι λίγο μεγαλύτερη από αυτή της κανονικής κατανομής. Τέλος, οι δείκτες 2 και 7 παρουσιάζουν κύρτωση σχεδόν ίση με 3.

Ο στατιστικός έλεγχος *Jarque-Berra* εκτιμά τη διαφορά της κύρτωσης και της ασυμμετρίας των δεικτών (χρονολογικών σειρών) σε σχέση με την κύρτωση και την ασυμμετρία της κανονικής κατανομής. Η στατιστική υπολογίζεται ως εξής:

$$JB = \frac{N-k}{6} \left(S^2 + \frac{1}{4} (K-3)^2 \right),$$

όπου S είναι η ασυμμετρία, K είναι η κύρτωση και k ο αριθμός των παραμέτρων που εκτιμώνται. Ο πίνακας 2 παρουσιάζει της τιμές της στατιστικής για κάθε δείκτη.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

	Δείκτης 1	Δείκτης 2	Δείκτης 3	Δείκτης 4	Δείκτης 5	Δείκτης 6	Δείκτης 7	Δείκτης 8
Jarque-Berra	15,332340	6,011972	827,474100	224,247900	66,239990	1,772196	248,099800	1.211,808000
probability	0,000468	0,049490	0,000000	0,000000	0,000000	0,412261	0,000000	0,000000

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση κανονικότητας, η στατιστική *Jarque-Berra* κατανέμεται σύμφωνα με τη X^2 με 2 βαθμούς ελευθερίας. Παρατηρούμε ότι σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha = 5\%$, για κάθε δείκτη, ισχύει $\alpha > p_value$. Συνεπώς απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση κανονικότητας των σειρών.

Ο πίνακας 3 παρουσιάζει τους συντελεστές συσχέτισης για τους οκτώ δείκτες. Είναι φανερό ότι οι δείκτες παρουσιάζουν χαμηλούς συντελεστές συσχέτισης. Αυτό είναι ένα επιθυμητό χαρακτηριστικό των δεικτών στην περίπτωση κατασκευής ενός αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου. Οι συντελεστές συσχέτισης κυμαίνονται από 0,1735 (συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των δεικτών 6 και 7) σε 0,7856 (συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των δεικτών 6 και 4). Ο μέσος συντελεστής συσχέτισης ανά ζεύγος δεικτών είναι 0,4671.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

	Δείκτης 1	Δείκτης 2	Δείκτης 3	Δείκτης 4	Δείκτης 5	Δείκτης 6	Δείκτης 7	Δείκτης 8
Δείκτης 1	1,0000							
Δείκτης 2	0,5898	1,0000						
Δείκτης 3	0,5255	0,3875	1,0000					
Δείκτης 4	0,7686	0,5509	0,6241	1,0000				
Δείκτης 5	0,4449	0,3989	0,5903	0,5576	1,0000			
Δείκτης 6	0,5819	0,4603	0,6713	0,7856	0,5421	1,0000		
Δείκτης 7	0,3556	0,2516	0,2518	0,2073	0,1921	0,1735	1,0000	
Δείκτης 8	0,4926	0,3124	0,4501	0,7250	0,4538	0,5090	0,2259	1,0000

Στην εμπειρική ανάλυση εκτιμάμε το υπόδειγμα $AR(1)$ - $GARCH(1,1)$:

$$r_t = m + \phi \sqrt{z_{t-1}} + z_t \sigma_t$$

$$z_t \stackrel{iid}{\sim} D(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = w + a \varepsilon_{t-1}^2 + b \sigma_{t-1}^2$$

υποθέτοντας δύο διαφορετικές συναρτήσεις πυκνότητας για τα z_t , την κανονική $\{AR(1)\text{-}N-GARCH}(1,1)\}$ και την t -student $\{AR(1)\text{-}T-GARCH}(1,1)\}$. Τα υποδείγματα εκτιμώνται χρησιμοποιώντας το σύνολο των δεδομένων και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 4.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	Δείκτης 1	Δείκτης 2	Δείκτης 3	Δείκτης 4	Δείκτης 5	Δείκτης 6	Δείκτης 7	Δείκτης 8
<i>Κανονική Κατανομή</i>								
m	0,0098 [0.0019717]	0,0088 [0.0019619]	0,0059 [0.0011775]	0,0082 [0.0014616]	0,0036 [0.00074877]	0,0061 [0.0014185]	0,0059 [0.00097388]	0,0061 [0.0013856]
φ	0,2294 [0.083274]	0,1621 [0.07412]	0,4466 [0.099376]	0,3010 [0.076739]	0,5759 [0.073722]	0,4928 [0.072349]	0,1900 [0.08466]	0,3899 [0.12153]
w	0,2880 [0.33325]	0,0020 [0,11187]	0,2962 [0,099985]	0,2645 [0,79925]	0,1940 [0,24807]	0,9825 [0,067022]	0,1059 [0,088616]	0,6065 [0,01378]
a	0,0970 [0.097839]	0,0310 [0.042982]	0,6667 [0.1394]	0,0108 [0.29961]	0,0590 [0.41036]	0,0000 [0.015273]	0,1372 [0.15424]	1,0000 [0.12372]
b	0,8521 [0.056807]	0,9633 [0.024686]	0,2134 [0.12801]	0,8993 [0.034742]	0,6634 [0.066546]	0,5710 [0.039255]	0,7358 [0.080127]	0,0000 [0.1076]
Loglikelihood	435,6174	442,9459	618,4188	488,4933	631,5931	520,9382	622,7839	581,9773
<i>Kατανομή Student-t</i>								
m	0,0102 [0.0019532]	0,0084 [0.0018752]	0,0052 [0.00083345]	0,0099 [0.0013197]	0,0045 [0.00067919]	0,0070 [0.0012034]	0,0059 [0.00096801]	0,0073 [0.00093905]
φ	0,2088 [0.081333]	0,1611 [0.070979]	0,4121 [0.072937]	0,2402 [0.0645]	0,5366 [0.057776]	0,4457 [0.06016]	0,1857 [0.084473]	0,2679 [0.076796]
w	0,2851 [0.34002]	0,0020 [0.13021]	0,1432 [0.10358]	0,1825 [0.45293]	0,1408 [0.15415]	0,0396 [0.088672]	0,1063 [0.092585]	0,7655 [0.51861]
a	0,0962 [0.10139]	0,0276 [0.049077]	0,1673 [0.18291]	0,0187 [0.17944]	0,1138 [0.27769]	0,0273 [0.066757]	0,1330 [0.16025]	0,2709 [0.41918]
b	0,8526 [0.061286]	0,9666 [0.027183]	0,6769 [0.11762]	0,9171 [0.034552]	0,6990 [0.09728]	0,9466 [0.027414]	0,7391 [0.08181]	0,1715 [0.22165]
df	18,8405 [17,691]	11,0123 [13.451]	4,3021 [1.1591]	5,1098 [1.5656]	4,2432 [1.3635]	5,6905 [1.5488]	55,9812 [0.11307]	3,3796 [0.81639]
Loglikelihood	436,2550	443,6599	632,9872	501,1897	643,0977	537,1650	622,8065	605,4792

Τα τυπικά σφάλματα δίνονται στις αγιούλες.

Στην ανάλυση των χρονολογικών σειρών χρησιμοποιούνται ευρέως το κριτήριο πληροφοριών Akaike (*Akaike Information Criterion*) και το Bayesian κριτήριο Schwartz (*Schwartz Bayesian Criterion*). Πιο συγκεκριμένα:

- *Akaike Information Criterion*

$$AIC = -2 \ln L + k \ln(n)$$

όπου n = το μέγεθος του δείγματος

k = ο αριθμός των παραμέτρων

L = η μεγιστοποιημένη αξία της συνάρτησης πιθανότητας

Κάτω από την υπόθεση ότι τα σφάλματα κατανέμονται κανονικά, το κριτήριο παίρνει τη μορφή:

$$AIC = n \ln\left(\frac{RSS}{n}\right) + k \ln(n)$$

- ***Schwartz Bayesian Criterion***

$$BIC = -2 \ln L + 2k ,$$

Με βάση τα παραπάνω κριτήρια επιλέγεται το υπόδειγμα με τη μικρότερη τιμή. Ο πίνακας 4 παρουσιάζει τις τιμές των κριτηρίων αυτών για κάθε δείκτη για τα υπόδειγματα *AR(1)-N-GARCH(1,1)* και *AR(1)-T-GARCH(1,1)*. Παρατηρούμε ότι για τους δείκτες 1, 2 και 7 σύμφωνα με τα κριτήρια *AIC* και *BIC* προτιμάται το υπόδειγμα *AR(1)-T-GARCH(1,1)*, ενώ για τους δείκτες 3, 4, 5, 6 και 8 το υπόδειγμα *AR(1)-N-GARCH(1,1)*.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5

	AIC	BIC
Δείκτης 1		
κανονική κατανομή	-861,2348	-845,0526
κατανομή <i>t-student</i>	-860,5100	-841,0914
Δείκτης 2		
κανονική κατανομή	-875,8918	-859,7095
κατανομή <i>t-student</i>	-875,3197	-855,9011
Δείκτης 3		
κανονική κατανομή	-1.226,8000	-1.210,7000
κατανομή <i>t-student</i>	-1.254,0000	-1.234,6000
Δείκτης 4		
κανονική κατανομή	-966,9865	-950,8043
κατανομή <i>t-student</i>	-990,3794	-970,9607
Δείκτης 5		
κανονική κατανομή	-1.253,2000	-1.237,0000
κατανομή <i>t-student</i>	-1.274,2000	-1.254,8000
Δείκτης 6		
κανονική κατανομή	-1.031,9000	-1.015,7000
κατανομή <i>t-student</i>	-1.062,3000	-1.042,9000
Δείκτης 7		
κανονική κατανομή	-1.235,6000	-1.219,4000
κατανομή <i>t-student</i>	-1.233,6000	-1.214,1000
Δείκτης 8		
κανονική κατανομή	-1.154,0000	-1.137,8000
κατανομή <i>t-student</i>	-1.199,0000	-1.179,5000

Με βάση τα υποδείγματα $AR(1)$ - N - $GARCH(1,1)$ και $AR(1)$ - T - $GARCH(1,1)$ κάνουμε πρόβλεψη για τις τιμές της VaR για μία περίοδο μπροστά ($T+1$) και για τους οκτώ δείκτες. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον πίνακα 6.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6

	Δείκτης 1	Δείκτης 2	Δείκτης 3	Δείκτης 4	Δείκτης 5	Δείκτης 6	Δείκτης 7	Δείκτης 8
VaR (Normal distribution)	-0,0199 (-1,99%)	-0,0147 (-1,47%)	-0,0089 (-0,89%)	-0,0164 (-1,64%)	-0,0072 (-0,72%)	-0,0138 (-1,38%)	-0,0041 (-0,41%)	-0,0100 (-1,00%)
VaR (t-student distribution)	-0,0192 (-1,92%)	-0,0149 (-1,49%)	-0,0063 (-0,63%)	-0,0130 (-1,30%)	-0,0063 (-0,63%)	-0,0072 (-0,72%)	-0,0041 (-0,41%)	-0,0066 (-0,66%)

Τέλος χρησιμοποιώντας ένα κινητό δείγμα (moving window), $w = 88$, παρατηρήσεων εκτιμούμε τις προβλέψεις της VaR για μία περίοδο μπροστά και αξιολογούμε την αποτελεσματικότητα των υποδειγμάτων. Πιο αναλυτικά υπολογίζουμε για κάθε δείκτη τη VaR από $i = T+1$ ως $T+88$, όπου $T=100$, και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με τις τιμές των αποδόσεων του κάθε δείκτη από $i = 100$ ως 188. Παρατηρούμε ότι για το δείκτη 1 και για στα δύο υποδείγματα, $AR(1)$ - N - $GARCH(1,1)$ και $AR(1)$ - T - $GARCH(1,1)$, η εκτίμηση για τη VaR είναι μεγαλύτερη από την πραγματική τιμή της σε ποσοστό 73,86%, ποσοστό που υπερβαίνει κατά πολύ το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha = 5\%$. Συνεπώς και τα δύο υποδείγματα συστηματικά υπερεκτιμούν τη VaR . Με αντίστοιχο τρόπο παρατηρούμε ότι για τους δείκτες 2, 4, 6 και 7 και τα δύο υποδείγματα υπερεκτιμούν τη VaR και για τους δείκτες 3, 5 και 8 την υποεκτιμούν. Ακολουθούν οι πίνακες με τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων και για τους οκτώ δείκτες.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7i

a/a	INDEX 1	INDEX 1	VaR-N INDEX1	VaR-T INDEX1	INDEX 1 + VaR-N INDEX1	INDEX 1 + VaR-T INDEX1
1	-0,0127	0,0127	-0,0244	-0,0238	-0,0117	-0,0111
2	0,0050	0,0050	-0,0311	-0,0300	-0,0261	-0,0250
3	-0,0067	0,0067	-0,0253	-0,0247	-0,0186	-0,0180
4	-0,0765	0,0765	-0,0275	-0,0266	0,0490	0,0499
5	0,0316	0,0316	-0,0630	-0,0606	-0,0314	-0,0290

6	0,0247	0,0247	-0,0385	-0,0379	-0,0138	-0,0132
7	0,0384	0,0384	-0,0367	-0,0365	0,0017	0,0019
8	0,0539	0,0539	-0,0317	-0,0321	0,0222	0,0218
9	0,0498	0,0498	-0,0284	-0,0288	0,0214	0,0210
10	-0,0241	0,0241	-0,0284	-0,0287	-0,0043	-0,0046
11	0,0405	0,0405	-0,0478	-0,0465	-0,0073	-0,0060
12	0,0525	0,0525	-0,0332	-0,0330	0,0193	0,0195
13	0,0122	0,0122	-0,0301	-0,0302	-0,0179	-0,0180
14	0,0380	0,0380	-0,0364	-0,0359	0,0016	0,0021
15	0,0061	0,0061	-0,0294	-0,0294	-0,0233	-0,0233
16	0,0004	0,0004	-0,0343	-0,0335	-0,0339	-0,0331
17	0,0035	0,0035	-0,0334	-0,0325	-0,0299	-0,0290
18	0,0233	0,0233	-0,0305	-0,0296	-0,0072	-0,0063
19	0,0676	0,0676	-0,0243	-0,0240	0,0433	0,0436
20	0,1088	0,1088	-0,0208	-0,0215	0,0880	0,0873
21	0,0025	0,0025	-0,0262	-0,0277	-0,0237	-0,0252
22	0,1000	0,1000	-0,0489	-0,0483	0,0511	0,0517
23	0,0173	0,0173	-0,0392	-0,0399	-0,0219	-0,0226
24	-0,0419	0,0419	-0,0537	-0,0525	-0,0118	-0,0106
25	-0,0244	0,0244	-0,0689	-0,0667	-0,0445	-0,0423
26	0,0485	0,0485	-0,0614	-0,0598	-0,0129	-0,0113
27	-0,0158	0,0158	-0,0443	-0,0440	-0,0285	-0,0282
28	0,0535	0,0535	-0,0575	-0,0563	-0,0040	-0,0028
29	-0,0108	0,0108	-0,0421	-0,0421	-0,0313	-0,0313
30	-0,0201	0,0201	-0,0549	-0,0537	-0,0348	-0,0336
31	-0,0430	0,0430	-0,0546	-0,0532	-0,0116	-0,0102
32	0,0316	0,0316	-0,0612	-0,0595	-0,0296	-0,0279
33	0,0288	0,0288	-0,0423	-0,0418	-0,0135	-0,0130
34	-0,0256	0,0256	-0,0394	-0,0390	-0,0138	-0,0134
35	-0,0230	0,0230	-0,0526	-0,0512	-0,0296	-0,0282
36	0,0227	0,0227	-0,0502	-0,0488	-0,0275	-0,0261
37	0,0090	0,0090	-0,0371	-0,0368	-0,0281	-0,0278
38	-0,0032	0,0032	-0,0371	-0,0364	-0,0339	-0,0332
39	-0,0106	0,0106	-0,0376	-0,0367	-0,0270	-0,0261
40	-0,0122	0,0122	-0,0378	-0,0370	-0,0256	-0,0248
41	-0,0373	0,0373	-0,0368	-0,0358	0,0005	0,0015
42	0,0185	0,0185	-0,0459	-0,0448	-0,0274	-0,0263
43	0,0197	0,0197	-0,0312	-0,0313	-0,0115	-0,0116

a/a	INDEX 2	INDEX 2	VAR-N INDEX2	VAR-T INDEX2	INDEX 2 + VAR-N INDEX2	VAR-T INDEX2	INDEX 2 + VAR-N INDEX2	VAR-T INDEX2
1	0,0008	0,0008	-0,0302	-0,0298	-0,0294	-0,0290	-0,0231	-0,0235
2	0,0057	0,0057	-0,0292	-0,0288	-0,0235	-0,0231	-0,0229	-0,0290
3	0,0023	0,0023	-0,0277	-0,0276	-0,0254	-0,0253	-0,0223	-0,0229
4	0,0370	0,0370	-0,0277	-0,0276	-0,0307	-0,0303	-0,0294	-0,0290
5	0,0050	0,0050	-0,0357	-0,0353	-0,0307	-0,0303	-0,0295	-0,0292
6	0,0183	0,0183	-0,0299	-0,0295	-0,0116	-0,0112	-0,0116	-0,0112
7	0,0198	0,0198	-0,0322	-0,0320	-0,0124	-0,0122	-0,0244	-0,0244
8	0,0244	0,0244	-0,0255	-0,0255	-0,0011	-0,0011	-0,0081	-0,0124
9	0,0081	0,0081	-0,0242	-0,0241	-0,0161	-0,0160	-0,0161	-0,0138
10	0,0124	0,0124	-0,0262	-0,0262	-0,0188	-0,0186	-0,0107	-0,0107
11	0,0107	0,0107	-0,0295	-0,0293	-0,0188	-0,0186	-0,0386	-0,0386
12	0,0386	0,0386	-0,0251	-0,0251	-0,0135	-0,0135	-0,0090	-0,0090
13	0,0090	0,0090	-0,0209	-0,0210	-0,0119	-0,0120	-0,0216	-0,0216
14	0,0216	0,0216	-0,0286	-0,0286	-0,0070	-0,0070	-0,0046	-0,0046
15	0,0046	0,0046	-0,0232	-0,0232	-0,0186	-0,0186	-0,0055	-0,0055
16	0,0055	0,0055	-0,0254	-0,0254	-0,0198	-0,0198	-0,0108	-0,0108
17	0,0108	0,0108	-0,0267	-0,0266	-0,0158	-0,0158	-0,0075	-0,0075
18	0,0075	0,0075	-0,0234	-0,0233	-0,0159	-0,0159	-0,0108	-0,0108
19	0,0108	0,0108	-0,0267	-0,0262	-0,0121	-0,0121	-0,0383	-0,0383
20	0,0682	0,0682	-0,0193	-0,0194	-0,0488	-0,0488	-0,0114	-0,0114
21	0,0114	0,0114	-0,0172	-0,0168	-0,0054	-0,0054	-0,0367	-0,0367
22	0,0367	0,0367	-0,0258	-0,0255	-0,0112	-0,0112	-0,0109	-0,0109
23	0,0227	0,0227	-0,0218	-0,0214	-0,0009	-0,0009	-0,0009	-0,0009
24	0,0368	0,0368	-0,0324	-0,0319	-0,0049	-0,0049	-0,0227	-0,0227
25	0,0154	0,0154	-0,0359	-0,0355	-0,0201	-0,0201	-0,0205	-0,0205

ITINAKAE TII

83	0,0213	0,0213	-0,0228	-0,0222	-0,0015	-0,0009	-0,0056	-0,0056
84	-0,0223	0,0223	-0,0251	-0,0241	-0,0028	-0,0018	-0,0018	-0,0018
85	0,0156	0,0156	-0,0301	-0,0292	-0,0145	-0,0136	-0,0145	-0,0145
86	0,0195	0,0195	-0,0204	-0,0202	-0,0009	-0,0007	-0,0009	-0,0007
87	0,0283	0,0283	-0,0183	-0,0182	0,0100	0,0101	0,0100	0,0101
88	0,0071	0,0071	-0,0158	-0,0158	-0,0087	-0,0087	-0,0087	-0,0087



26	0,0124	0,0124	-0,0321	-0,0314	-0,0197	-0,0190
27	0,0005	0,0005	-0,0270	-0,0264	-0,0265	-0,0259
28	0,0173	0,0173	-0,0283	-0,0281	-0,0110	-0,0108
29	-0,0219	0,0219	-0,0250	-0,0247	-0,0031	-0,0028
30	-0,0073	0,0073	-0,0320	-0,0316	-0,0247	-0,0243
31	0,0025	0,0025	-0,0291	-0,0287	-0,0266	-0,0262
32	0,0461	0,0461	-0,0269	-0,0266	0,0192	0,0195
33	0,0215	0,0215	-0,0207	-0,0204	0,0008	0,0011
34	-0,0171	0,0171	-0,0241	-0,0236	-0,0070	-0,0065
35	0,0083	0,0083	-0,0307	-0,0302	-0,0224	-0,0219
36	-0,0012	0,0012	-0,0259	-0,0255	-0,0247	-0,0243
37	-0,0010	0,0010	-0,0269	-0,0266	-0,0259	-0,0256
38	0,0043	0,0043	-0,0263	-0,0260	-0,0220	-0,0217
39	-0,0030	0,0030	-0,0249	-0,0246	-0,0219	-0,0216
40	0,0057	0,0057	-0,0256	-0,0255	-0,0199	-0,0198
41	0,0063	0,0063	-0,0236	-0,0234	-0,0173	-0,0171
42	0,0271	0,0271	-0,0229	-0,0230	0,0042	0,0041
43	0,0014	0,0014	-0,0193	-0,0195	-0,0179	-0,0181
44	0,0151	0,0151	-0,0231	-0,0230	-0,0080	-0,0079
45	0,0041	0,0041	-0,0203	-0,0203	-0,0162	-0,0162
46	-0,0121	0,0121	-0,0216	-0,0219	-0,0095	-0,0098
47	0,0211	0,0211	-0,0243	-0,0245	-0,0032	-0,0034
48	0,0039	0,0039	-0,0186	-0,0188	-0,0147	-0,0149
49	0,0187	0,0187	-0,0209	-0,0211	-0,0022	-0,0024
50	0,0120	0,0120	-0,0181	-0,0184	-0,0061	-0,0064
51	-0,0034	0,0034	-0,0187	-0,0191	-0,0153	-0,0157
52	0,0063	0,0063	-0,0209	-0,0210	-0,0146	-0,0147
53	0,0093	0,0093	-0,0188	-0,0191	-0,0095	-0,0098
54	-0,0165	0,0165	-0,0178	-0,0181	-0,0013	-0,0016
55	-0,0046	0,0046	-0,0225	-0,0228	-0,0179	-0,0182
56	0,0341	0,0341	-0,0203	-0,0206	0,0138	0,0135
57	0,0252	0,0252	-0,0145	-0,0147	0,0107	0,0105
58	0,0191	0,0191	-0,0156	-0,0158	0,0035	0,0033
59	-0,0223	0,0223	-0,0161	-0,0162	0,0062	0,0061
60	0,0123	0,0123	-0,0240	-0,0240	-0,0117	-0,0117
61	0,0567	0,0567	-0,0180	-0,0182	0,0387	0,0385
62	0,0053	0,0053	-0,0132	-0,0132	-0,0079	-0,0079
63	0,0073	0,0073	-0,0212	-0,0211	-0,0139	-0,0138

a/b	INDEX 3	INDEX 3	VAR-N INDEX3	VAR-T INDEX3	INDEX 3 +	VAR-N INDEX3	VAR-T INDEX3	INDEX 3 +
1	0,0030	0,0030	0,0010	0,0009	0,0020	0,0021	-0,0052	-0,0018
2	0,0016	0,0016	0,0117	0,0068	-0,0101	-0,0029	-0,0018	-0,0018
3	-0,0051	0,0051	0,0080	-0,0069	-0,0029	-0,0029	-0,0018	-0,0018
4	-0,0580	0,0580	0,0157	-0,0107	0,0423	0,0423	0,0473	0,0473
5	0,0019	0,0019	0,037	-0,037	-0,0590	-0,1018	-0,0571	-0,0571
6	-0,0048	0,0048	0,0427	-0,0302	-0,0302	-0,0379	-0,0254	-0,0254
7	0,0166	0,0166	0,0253	-0,0277	-0,0277	-0,0087	-0,0111	-0,0111

ILINKAKAZ TIII

88	0,0067	0,0067	-0,0152	-0,0154	-0,0085	-0,0087		
87	0,0061	0,0061	-0,0149	-0,0152	-0,0088	-0,0091		
86	0,0104	0,0104	-0,0166	-0,0168	-0,0062	-0,0064		
85	0,0031	0,0031	-0,0192	-0,0193	-0,0161	-0,0162		
84	-0,0106	0,0106	-0,0184	-0,0185	-0,0078	-0,0079		
83	-0,0060	0,0060	-0,0145	-0,0148	-0,0085	-0,0088		
82	0,0181	0,0181	-0,0187	-0,0188	-0,0006	-0,0007		
81	-0,0058	0,0058	-0,0168	-0,0170	-0,0110	-0,0112		
80	0,0061	0,0061	-0,0137	-0,0139	-0,0076	-0,0078		
79	0,0281	0,0281	-0,0168	-0,0170	0,0113	0,0111		
78	0,0084	0,0084	-0,0173	-0,0173	-0,0089	-0,0089		
77	0,0084	0,0084	-0,0196	-0,0197	-0,0112	-0,0113		
76	-0,0023	0,0023	-0,0201	-0,0200	-0,0178	-0,0177		
75	-0,0033	0,0033	-0,0201	-0,0199	-0,0168	-0,0166		
74	-0,0011	0,0011	-0,0214	-0,0211	-0,0203	-0,0200		
73	-0,0070	0,0070	-0,0252	-0,0253	-0,0182	-0,0183		
72	-0,0284	0,0284	-0,0171	-0,0172	0,0113	0,0112		
71	0,0112	0,0112	-0,0162	-0,0164	-0,0050	-0,0052		
70	0,0200	0,0200	-0,0187	-0,0188	0,0013	0,0012		
69	0,0065	0,0065	-0,0147	-0,0147	-0,0082	-0,0082		
68	0,0338	0,0338	-0,0195	-0,0195	0,0143	0,0143		
67	0,0019	0,0019	-0,0174	-0,0175	-0,0155	-0,0156		
66	0,0173	0,0173	-0,0170	-0,0172	0,0003	0,0001		
65	0,0226	0,0226	-0,0181	-0,0180	0,0045	0,0046		

8	0,0063	0,0063	-0,0103	-0,0154	-0,0040	-0,0091
9	0,0261	0,0261	-0,0083	-0,0158	0,0178	0,0103
10	0,0011	0,0011	-0,0087	-0,0073	-0,0076	-0,0062
11	0,0057	0,0057	-0,0204	-0,0163	-0,0147	-0,0106
12	0,0280	0,0280	-0,0068	-0,0114	0,0212	0,0166
13	0,0117	0,0117	-0,0102	-0,0043	0,0015	0,0074
14	0,0137	0,0137	-0,0072	-0,0085	0,0065	0,0052
15	0,0083	0,0083	-0,0008	-0,0057	0,0075	0,0026
16	0,0080	0,0080	-0,0022	-0,0061	0,0058	0,0019
17	0,0048	0,0048	-0,0012	-0,0049	0,0036	-0,0001
18	0,0053	0,0053	-0,0040	-0,0055	0,0013	-0,0002
19	0,0108	0,0108	-0,0029	-0,0046	0,0079	0,0062
20	0,0151	0,0151	-0,0002	-0,0020	0,0149	0,0131
21	0,0182	0,0182	0,0008	-0,0003	0,0174	0,0179
22	0,0127	0,0127	0,0012	0,0006	0,0115	0,0121
23	0,0180	0,0180	0,0007	-0,0009	0,0173	0,0171
24	0,0141	0,0141	0,0005	0,0006	0,0136	0,0135
25	0,0068	0,0068	0,0013	-0,0005	0,0055	0,0063
26	0,0218	0,0218	-0,0036	-0,0034	0,0182	0,0184
27	0,0093	0,0093	-0,0047	0,0003	0,0046	0,0090
28	0,0159	0,0159	-0,0055	-0,0042	0,0104	0,0117
29	0,0091	0,0091	-0,0009	-0,0013	0,0082	0,0078
30	-0,0045	0,0045	-0,0022	-0,0034	0,0023	0,0011
31	-0,0010	0,0010	-0,0182	-0,0110	-0,0172	-0,0100
32	0,0064	0,0064	-0,0096	-0,0087	-0,0032	-0,0023
33	0,0204	0,0204	-0,0027	-0,0046	0,0177	0,0158
34	0,0105	0,0105	-0,0038	-0,0006	0,0067	0,0099
35	0,0026	0,0026	-0,0033	-0,0037	-0,0007	-0,0011
36	0,0076	0,0076	-0,0083	-0,0068	-0,0007	0,0008
37	0,0093	0,0093	-0,0022	-0,0039	0,0071	0,0054
38	-0,0023	0,0023	-0,0003	-0,0025	0,0020	-0,0002
39	0,0070	0,0070	-0,0146	-0,0091	-0,0076	-0,0021
40	0,0085	0,0085	-0,0040	-0,0043	0,0045	0,0042
41	0,0024	0,0024	-0,0011	-0,0030	0,0013	-0,0006
42	0,0085	0,0085	-0,0072	-0,0058	0,0013	0,0027
43	0,0054	0,0054	-0,0016	-0,0028	0,0038	0,0026
44	0,0060	0,0060	-0,0035	-0,0038	0,0025	0,0022
45	0,0103	0,0103	-0,0024	-0,0032	0,0079	0,0071

46	0,0004	0,0004	0,0000	-0,0014	0,0004	-0,0010
47	0,0063	0,0063	-0,0109	-0,0067	-0,0046	-0,0004
48	0,0059	0,0059	-0,0032	-0,0036	0,0027	0,0023
49	0,0021	0,0021	-0,0026	-0,0035	-0,0005	-0,0014
50	-0,0019	0,0019	-0,0066	-0,0053	-0,0047	-0,0034
51	-0,0020	0,0020	-0,0110	-0,0077	-0,0090	-0,0057
52	0,0068	0,0068	-0,0100	-0,0078	-0,0032	-0,0010
53	0,0029	0,0029	-0,0026	-0,0037	0,0003	-0,0008
54	0,0041	0,0041	-0,0060	-0,0053	-0,0019	-0,0012
55	0,0112	0,0112	-0,0039	-0,0044	0,0073	0,0068
56	0,0070	0,0070	-0,0005	-0,0015	0,0065	0,0055
57	0,0103	0,0103	-0,0026	-0,0030	0,0077	0,0073
58	0,0070	0,0070	-0,0001	-0,0014	0,0069	0,0056
59	0,0071	0,0071	-0,0022	-0,0027	0,0049	0,0044
60	0,0139	0,0139	-0,0016	-0,0024	0,0123	0,0115
61	0,0098	0,0098	0,0000	-0,0001	0,0098	0,0097
62	0,0048	0,0048	-0,0007	-0,0016	0,0041	0,0032
63	0,0004	0,0004	-0,0046	-0,0037	-0,0042	-0,0033
64	0,0037	0,0037	-0,0087	-0,0062	-0,0050	-0,0025
65	0,0086	0,0086	-0,0042	-0,0043	0,0044	0,0043
66	0,0106	0,0106	-0,0008	-0,0022	0,0098	0,0084
67	0,0048	0,0048	0,0004	-0,0011	0,0044	0,0037
68	0,0123	0,0123	-0,0048	-0,0038	0,0075	0,0085
69	0,0121	0,0121	-0,0008	-0,0009	0,0113	0,0112
70	0,0055	0,0055	0,0007	-0,0007	0,0048	0,0048
71	0,0043	0,0043	-0,0045	-0,0036	-0,0002	0,0007
72	-0,0051	0,0051	-0,0042	-0,0040	0,0009	0,0011
73	-0,0035	0,0035	-0,0167	-0,0099	-0,0132	-0,0064
74	0,0016	0,0016	-0,0118	-0,0092	-0,0102	-0,0076
75	0,0065	0,0065	-0,0056	-0,0063	0,0009	0,0002
76	0,0083	0,0083	-0,0018	-0,0036	0,0065	0,0047
77	0,0036	0,0036	-0,0006	-0,0025	0,0030	0,0011
78	0,0031	0,0031	-0,0054	-0,0046	-0,0023	-0,0015
79	0,0107	0,0107	-0,0050	-0,0047	0,0057	0,0060
80	0,0075	0,0075	-0,0009	-0,0016	0,0066	0,0059
81	0,0030	0,0030	-0,0020	-0,0027	0,0010	0,0003
82	0,0078	0,0078	-0,0061	-0,0047	0,0017	0,0031
83	-0,0035	0,0035	-0,0015	-0,0025	0,0020	0,0010

84	-0,0084	0,0084	-0,0158	-0,0093	-0,0074	-0,0009
85	-0,0017	0,0017	-0,0193	-0,0126	-0,0176	-0,0109
86	0,0087	0,0087	-0,0092	-0,0089	-0,0005	-0,0002
87	0,0136	0,0136	-0,0023	-0,0040	0,0113	0,0096
88	0,0029	0,0029	0,0002	-0,0015	0,0027	0,0014

ΠΙΝΑΚΑΣ 7iv

a/a	INDEX 4	INDEX 4	VaR-N _{INDEX 4}	VaR-T _{INDEX 4}	INDEX 4 + VaR-N _{INDEX 4}	INDEX 4 + VaR-T _{INDEX 4}
1	-0,0119	0,0119	-0,0188	-0,0151	-0,0069	-0,0032
2	0,0031	0,0031	-0,0234	-0,0188	-0,0203	-0,0157
3	-0,0057	0,0057	-0,0187	-0,0151	-0,013	-0,0094
4	-0,089	0,089	-0,0214	-0,0174	0,0676	0,0716
5	-0,0062	0,0062	-0,0508	-0,0446	-0,0446	-0,0384
6	0,0125	0,0125	-0,0254	-0,0239	-0,0129	-0,0114
7	0,0243	0,0243	-0,0193	-0,0189	0,005	0,0054
8	0,0273	0,0273	-0,0154	-0,0156	0,0119	0,0117
9	0,0165	0,0165	-0,0142	-0,0143	0,0023	0,0022
10	-0,0048	0,0048	-0,017	-0,0162	-0,0122	-0,0114
11	0,0206	0,0206	-0,0233	-0,0212	-0,0027	-0,0006
12	0,0513	0,0513	-0,0154	-0,0147	0,0359	0,0366
13	0,02	0,02	-0,0065	-0,008	0,0135	0,012
14	0,0293	0,0293	-0,0156	-0,0149	0,0137	0,0144
15	0,0081	0,0081	-0,0126	-0,0124	-0,0045	-0,0043
16	-0,0078	0,0078	-0,0187	-0,0169	-0,0109	-0,0091
17	0,0162	0,0162	-0,0234	-0,0208	-0,0072	-0,0046
18	0,0042	0,0042	-0,016	-0,0146	-0,0118	-0,0104
19	0,0338	0,0338	-0,0194	-0,0172	0,0144	0,0166
20	0,0339	0,0339	-0,0106	-0,0101	0,0233	0,0238
21	0,0074	0,0074	-0,0104	-0,0098	-0,003	-0,0024
22	0,0376	0,0376	-0,0183	-0,0162	0,0193	0,0214
23	0,0003	0,0003	-0,0094	-0,0089	-0,0091	-0,0086
24	-0,0148	0,0148	-0,0206	-0,0178	-0,0058	-0,003
25	-0,0077	0,0077	-0,0252	-0,0217	-0,0175	-0,014
26	0,0292	0,0292	-0,0229	-0,0198	0,0063	0,0094
27	0,0015	0,0015	-0,0118	-0,0108	-0,0103	-0,0093

29	0,0201	-0,0174	-0,0201	-0,0174	-0,0201	-0,0174	0,0201	0,0127	0,0007
30	-0,0132	0,0132	-0,0183	-0,0157	-0,0157	-0,0051	-0,0011	0,0026	-0,0063
31	-0,0232	0,0232	-0,0243	-0,0232	-0,0243	-0,0206	-0,0121	-0,0134	0,0459
32	0,0239	0,0239	-0,0275	-0,0275	-0,0234	-0,0036	-0,0036	0,0005	0,0005
33	0,0459	0,0459	-0,0134	-0,0134	-0,0145	-0,0111	0,0111	0,0111	0,0111
34	-0,0038	0,0038	-0,0025	-0,0025	-0,007	-0,0072	-0,0032	-0,0032	-0,0034
35	-0,0025	0,0025	-0,0221	-0,0192	-0,0192	-0,0196	-0,0196	-0,0167	-0,0064
36	0,0123	0,0123	-0,0215	-0,0187	-0,015	-0,0026	-0,0026	0,0044	0,0014
37	0,0194	0,0194	-0,0145	-0,0129	-0,0145	-0,0034	-0,0034	-0,0018	-0,0018
38	0,0111	0,0111	-0,0111	-0,0111	-0,0145	-0,0168	-0,0168	0,0003	0,003
39	0,0129	0,0129	-0,0191	-0,0191	-0,0129	-0,0162	-0,0162	-0,0033	-0,0115
40	0,0129	0,0129	-0,0191	-0,0191	-0,0129	-0,0162	-0,0162	0,019	0,019
41	-0,0326	0,0326	-0,016	-0,016	-0,0326	-0,0136	-0,0136	-0,0326	-0,0326
42	0,0207	0,0207	-0,0207	-0,0207	-0,0244	-0,0191	-0,0191	0,0191	0,0191
43	0,0159	0,0159	-0,0146	-0,0146	-0,0159	-0,0151	-0,0151	-0,0053	-0,0053
44	0,0151	0,0151	-0,0131	-0,0131	-0,0158	-0,0137	-0,0007	0,0014	0,0014
45	0,0079	0,0079	-0,0158	-0,0158	-0,0136	-0,0079	-0,0079	-0,0057	-0,0057
46	-0,0137	0,0137	-0,0178	-0,0178	-0,0152	-0,0041	-0,0041	-0,0015	-0,0015
47	0,0191	0,0191	-0,0244	-0,0244	-0,0207	-0,0207	-0,0207	-0,0016	-0,0129
48	0,0028	0,0028	-0,0145	-0,0145	-0,0125	-0,0117	-0,0117	-0,0097	-0,0097
49	0,0033	0,0033	-0,0193	-0,0193	-0,0162	-0,016	-0,016	-0,0129	-0,0129
50	-0,0382	0,0382	-0,021	-0,021	-0,0177	-0,0592	-0,0592	-0,0559	-0,0559
51	-0,0435	0,0435	-0,0324	-0,0324	-0,0277	-0,0111	-0,0111	0,0158	0,0158
52	0,0037	0,0037	-0,0346	-0,0346	-0,0299	-0,0309	-0,0309	-0,0262	-0,0262
53	-0,0149	0,0149	-0,0201	-0,0201	-0,0184	-0,0052	-0,0052	-0,0035	-0,0035
54	0,007	0,007	-0,0257	-0,0257	-0,0228	-0,0187	-0,0187	-0,0158	-0,0158
55	0,0292	0,0292	-0,0189	-0,0189	-0,0173	-0,0103	-0,0103	0,0119	0,0119
56	0,0026	0,0026	-0,0121	-0,0121	-0,0118	-0,0095	-0,0095	-0,0092	-0,0092
57	0,0131	0,0131	-0,026	-0,026	-0,0176	-0,0069	-0,0069	-0,0045	-0,0045
58	-0,0001	-0,0001	0,001	0,001	-0,0149	-0,0156	-0,0156	-0,0139	-0,0139
59	0,0095	0,0095	-0,0207	-0,0207	-0,0181	-0,0112	-0,0112	-0,0086	-0,0086
60	0,0315	0,0315	-0,0151	-0,0151	-0,0141	-0,0141	-0,0141	0,0164	0,0164
61	0,0415	0,0415	-0,0174	-0,0174	-0,0099	-0,0077	-0,0077	0,0169	0,0169
62	0,0246	0,0246	-0,0246	-0,0246	-0,0079	-0,0077	-0,0077	0,0316	0,0316
63	0,0146	0,0146	-0,0128	-0,0128	-0,0113	-0,0018	-0,0018	0,0033	0,0033
64	0,0195	0,0195	-0,0156	-0,0156	-0,0135	-0,0039	-0,0039	0,006	0,006
65	0,0127	0,0127	-0,0127	-0,0127	-0,0114	-0,0013	-0,0013	0,0007	0,0007

a/b	INDEX 5	INDEX 5	VAR-N INDEX 5	VAR-T INDEX 5	INDEX 5 +	INDEX 5 -	VAR-T INDEX 5	VAR-N INDEX 5	INDEX 5 +	INDEX 5 -
1	0,0040	0,0015	-0,0004	0,0025	0,0036	-0,0029	-0,0001	0,0025	0,0001	0,0001
2	0,0022	0,0022	-0,0072	-0,0051	-0,0050	-0,0029	-0,0277	-0,0164	-0,0174	-0,0155
3	0,0049	0,0049	-0,0081	-0,0060	-0,0032	-0,0011	-0,0001	0,0160	0,0142	0,0142
4	-0,0319	0,0319	-0,0064	-0,0042	-0,0255	-0,0248	-0,0154	0,0211	0,0160	0,0160
5	-0,0107	0,0107	-0,0346	-0,0204	-0,0212	-0,0159	-0,0159	0,0029	0,0005	0,0131
6	-0,0048	0,0048	-0,0355	-0,0239	-0,0239	-0,0179	-0,0179	0,0159	0,0159	0,0155
7	-0,0333	0,0333	-0,0154	-0,0121	-0,0121	-0,0154	-0,0154	0,0029	0,0005	0,0131
8	-0,0048	0,0048	-0,0355	-0,0239	-0,0239	-0,0179	-0,0179	0,0159	0,0159	0,0155
9	-0,0211	0,0211	-0,0051	-0,0024	-0,0024	-0,0009	-0,0009	0,0025	0,0025	0,0025
10	0,0251	0,0251	-0,0159	-0,0004	-0,0004	-0,0024	-0,0024	0,0025	0,0025	0,0025

LITNAKAE 7V

78	0,0149	0,0149	-0,0152	-0,012	-0,012	-0,0003	-0,0003	0,0225	0,0155	-0,0028
77	0,0137	0,0137	-0,0179	-0,0144	-0,0144	-0,0042	-0,0042	0,0133	0,0131	0,0002
76	0,0049	0,0049	-0,0223	-0,0179	-0,0179	-0,0174	-0,0174	0,0139	0,0133	-0,0008
75	-0,0093	0,0093	-0,014	-0,011	-0,011	-0,0047	-0,0047	0,0176	0,0163	-0,0018
74	0,0176	0,0176	-0,0203	-0,0163	-0,0163	-0,0027	-0,0027	0,0093	0,0093	0,0013
73	-0,0031	0,0031	-0,0211	-0,017	-0,017	-0,018	-0,018	-0,0031	-0,0031	-0,0139
72	-0,0056	0,0056	-0,0192	-0,0153	-0,0153	-0,0136	-0,0136	0,0006	0,0006	-0,0097
71	0,0006	0,0006	-0,0158	-0,0129	-0,0129	-0,0152	-0,0152	-0,0123	-0,0123	-0,0123
70	0,012	0,012	-0,0111	-0,0091	-0,0091	-0,0029	-0,0029	0,012	0,0111	0,0173
69	0,028	0,028	-0,0131	-0,0107	-0,0149	-0,0149	-0,0149	0,0163	0,0122	0,009
68	0,0212	0,0212	-0,0147	-0,0122	-0,0065	-0,0041	-0,0041	0,0163	0,0122	0,006
67	0,0163	0,0163	-0,0122	-0,0041	-0,0092	-0,0116	-0,0116	0,0163	0,0122	0,006

11	0,0153	0,0153	-0,0112	-0,0117	0,0041	0,0036
12	0,0266	0,0266	-0,0032	-0,0038	0,0234	0,0228
13	0,0140	0,0140	0,0033	0,0022	0,0022	0,0118
14	0,0109	0,0109	-0,0031	-0,0032	0,0078	0,0077
15	0,0105	0,0105	-0,0042	-0,0036	0,0063	0,0069
16	0,0042	0,0042	-0,0039	-0,0028	0,0003	0,0014
17	0,0066	0,0066	-0,0073	-0,0059	-0,0007	0,0007
18	0,0033	0,0033	-0,0057	-0,0039	-0,0024	-0,0006
19	0,0099	0,0099	-0,0075	-0,0056	0,0024	0,0043
20	0,0108	0,0108	-0,0036	-0,0018	0,0072	0,0090
21	0,0191	0,0191	-0,0029	-0,0009	0,0162	0,0182
22	0,0221	0,0221	0,0014	0,0028	0,0207	0,0193
23	0,0175	0,0175	0,0030	0,0044	0,0145	0,0131
24	0,0178	0,0178	0,0007	0,0023	0,0171	0,0155
25	0,0134	0,0134	0,0009	0,0026	0,0125	0,0108
26	0,0166	0,0166	-0,0015	0,0005	0,0151	0,0161
27	0,0068	0,0068	0,0003	0,0022	0,0065	0,0046
28	0,0142	0,0142	-0,0054	-0,0034	0,0088	0,0108
29	0,0121	0,0121	-0,0013	0,0005	0,0108	0,0116
30	0,0042	0,0042	-0,0023	-0,0004	0,0019	0,0038
31	-0,0071	0,0071	-0,0070	-0,0048	0,0001	0,0023
32	-0,0001	0,0001	-0,0143	-0,0126	-0,0142	-0,0125
33	0,0273	0,0273	-0,0098	-0,0080	0,0175	0,0193
34	0,0170	0,0170	0,0032	0,0023	0,0138	0,0147
35	0,0168	0,0168	-0,0016	-0,0015	0,0152	0,0153
36	0,0157	0,0157	-0,0010	-0,0005	0,0147	0,0152
37	0,0071	0,0071	-0,0011	-0,0002	0,0060	0,0069
38	0,0013	0,0013	-0,0058	-0,0044	-0,0045	-0,0031
39	0,0076	0,0076	-0,0090	-0,0075	-0,0014	0,0001
40	0,0126	0,0126	-0,0052	-0,0035	0,0074	0,0091
41	0,0064	0,0064	-0,0022	-0,0005	0,0042	0,0059
42	0,0093	0,0093	-0,0057	-0,0037	0,0036	0,0056
43	0,0062	0,0062	-0,0039	-0,0018	0,0023	0,0044
44	-0,0008	0,0008	-0,0056	-0,0033	-0,0048	-0,0025
45	0,0138	0,0138	-0,0099	-0,0077	0,0039	0,0061
46	0,0019	0,0019	-0,0020	-0,0006	-0,0001	0,0013
47	0,0046	0,0046	-0,0090	-0,0075	-0,0044	-0,0029
48	0,0087	0,0087	-0,0071	-0,0052	0,0016	0,0035

86	-0,0080	0,0103	0,0103	-0,0081	-0,0183	-0,0184	-0,0103	-0,0103
85	-0,0163	-0,0117	0,0117	-0,0164	-0,0280	-0,0281	-0,0117	-0,0117
84	-0,0077	0,0067	0,0067	-0,0187	-0,0197	-0,0264	-0,0264	-0,0264
83	-0,0035	0,0021	0,0021	-0,0113	-0,0127	-0,0148	-0,0148	-0,0148
82	-0,0102	-0,0115	-0,0115	-0,0146	-0,0159	-0,0044	-0,0044	-0,0044
81	0,0035	0,0018	0,0018	-0,0055	-0,0072	-0,0090	-0,0090	-0,0090
80	0,0008	-0,0005	-0,0005	-0,0035	-0,0048	-0,0043	-0,0043	-0,0043
79	-0,0021	-0,0038	-0,0038	-0,0109	-0,0126	-0,0088	-0,0088	-0,0088
78	-0,0048	-0,0065	-0,0065	-0,0096	-0,0113	-0,0048	-0,0048	-0,0048
77	-0,0038	-0,0049	-0,0049	-0,0065	-0,0076	-0,0027	-0,0027	-0,0027
76	-0,0105	-0,0119	-0,0119	-0,0151	-0,0165	-0,0046	-0,0046	-0,0046
75	-0,0059	-0,0073	-0,0073	-0,0163	-0,0177	-0,0104	-0,0104	-0,0104
74	-0,0062	-0,0040	-0,0040	-0,0057	-0,0079	-0,0119	-0,0119	-0,0119
73	-0,0010	-0,0029	-0,0029	-0,0035	-0,0054	-0,0025	-0,0025	-0,0025
72	0,0002	-0,0017	-0,0017	-0,0066	-0,0085	-0,0068	-0,0068	-0,0068
71	0,0001	-0,0017	-0,0017	-0,0017	-0,0035	-0,0025	-0,0025	-0,0025
70	0,0018	-0,0018	-0,0018	-0,0035	-0,0054	-0,0025	-0,0025	-0,0025
69	0,0074	-0,0017	-0,0017	-0,0027	-0,0056	-0,0045	-0,0101	-0,0119
68	0,0049	0,0036	0,0036	-0,0039	-0,0052	-0,0088	-0,0088	-0,0088
67	0,0068	0,0013	0,0013	-0,0022	-0,0028	-0,0081	-0,0081	-0,0081
66	-0,0062	-0,0076	-0,0076	-0,0023	-0,0028	-0,0140	-0,0140	-0,0140
65	0,0014	0,0000	0,0000	-0,0127	-0,0141	-0,0141	-0,0141	-0,0141
64	-0,0069	-0,0131	-0,0131	-0,0145	-0,0169	-0,0069	-0,0069	-0,0069
63	-0,0056	-0,0070	-0,0070	-0,0126	-0,0140	-0,0070	-0,0070	-0,0070
62	0,0046	0,0029	0,0029	-0,0011	-0,0028	-0,0057	-0,0057	-0,0057
61	0,0110	0,0046	0,0046	-0,0004	-0,0014	-0,0114	-0,0114	-0,0114
60	0,0096	0,0080	0,0080	-0,0040	-0,0056	-0,0136	-0,0136	-0,0136
59	0,0087	0,0091	0,0091	-0,0042	-0,0038	-0,0038	-0,0129	-0,0129
58	0,0123	0,0129	0,0129	-0,0016	-0,0027	-0,0073	-0,0073	-0,0073
57	0,0245	0,0250	0,0250	-0,0005	-0,0017	-0,0250	-0,0202	-0,0202
56	0,0170	0,0129	0,0129	-0,0019	-0,0013	-0,0142	-0,0142	-0,0142
55	0,0092	0,0085	0,0085	-0,0008	-0,0015	-0,0100	-0,0100	-0,0100
54	0,0100	0,0008	0,0008	-0,0008	-0,0015	-0,0001	-0,0002	-0,0002
53	0,0084	0,0073	0,0073	-0,0075	-0,0086	-0,0159	-0,0159	-0,0159
52	-0,0135	-0,0148	-0,0148	-0,0170	-0,0183	-0,0035	-0,0035	-0,0035
51	-0,0070	0,0048	0,0048	-0,0058	-0,0080	-0,0128	-0,0022	-0,0022
50	-0,0021	-0,0041	-0,0041	-0,0048	-0,0058	-0,0028	-0,0022	-0,0022
49	0,0027	0,0009	0,0009	-0,0026	-0,0044	-0,0053	-0,0053	-0,0053

a/a	INDEX 6	INDEX 6	VAR-N INDEX 6	VAR-T INDEX 6	VAR-N INDEX 6 + INDEX 6 +	VAR-T INDEX 6
1	0,0028	0,0028	-0,0111	-0,0033	-0,0083	-0,0005
2	0,0013	0,0013	-0,0174	-0,0090	-0,0161	-0,0077
3	0,0040	0,0040	-0,0181	-0,0097	-0,0141	-0,0057
4	0,0850	0,0850	-0,0208	-0,0122	0,0642	0,0728
5	-0,0357	0,0357	-0,0607	-0,0600	-0,0250	-0,0243
6	-0,0075	0,0075	-0,0364	-0,0375	-0,0289	-0,0300
7	0,0170	0,0170	-0,0225	-0,0244	-0,0055	-0,0074
8	0,0015	0,0015	-0,0104	-0,0132	-0,0089	-0,0117
9	0,0140	0,0140	-0,0180	-0,0198	-0,0040	-0,0058
10	-0,0027	0,0027	-0,0119	-0,0134	-0,0092	-0,0107
11	0,0220	0,0220	-0,0201	-0,0208	0,0019	0,0012
12	0,0506	0,0506	-0,0079	-0,0096	0,0427	0,0410
13	0,0191	0,0191	0,0062	0,0021	0,0129	0,0170
14	0,0193	0,0193	-0,0094	-0,0115	0,0099	0,0078
15	0,0068	0,0068	-0,0093	-0,0110	-0,0025	-0,0042
16	0,0037	0,0037	-0,0154	-0,0159	-0,0117	-0,0122
17	-0,0100	0,0100	-0,0170	-0,0168	-0,0070	-0,0068
18	-0,0015	0,0015	-0,0237	-0,0229	-0,0222	-0,0214
19	0,0114	0,0114	-0,0195	-0,0187	-0,0081	-0,0073
20	0,0262	0,0262	-0,0132	-0,0124	0,0130	0,0138
21	0,0070	0,0070	-0,0059	-0,0057	0,0011	0,0013
22	0,0398	0,0398	-0,0153	-0,0141	0,0245	0,0257
23	0,0067	0,0067	0,0008	-0,0002	0,0059	0,0065
24	-0,0143	0,0143	-0,0155	-0,0148	-0,0012	-0,0005
25	-0,0078	0,0078	-0,0258	-0,0246	-0,0180	-0,0168
26	0,0026	0,0026	-0,0074	-0,0074	0,0005	0,0018
27	0,0129	0,0129	-0,0175	-0,0167	-0,0046	-0,0048
28	-0,0044	0,0044	-0,0124	-0,0124	-0,0080	-0,0071
29	-0,0085	0,0085	-0,0210	-0,0210	-0,0125	-0,0109
30	-0,0039	0,0039	-0,0249	-0,0249	0,0019	0,0039

LILNAKAE 7vi

0,0057	0,0060	0,0061	-0,0058	-0,0055	0,0055	0,0118	0,0118	0,0118
--------	--------	--------	---------	---------	--------	--------	--------	--------



70	0,0089	0,0089	-0,0017	0,0021	0,0072	0,0068
71	0,0044	0,0044	-0,0144	-0,0095	-0,0100	-0,0051
72	0,0096	0,0096	-0,0166	-0,0111	-0,0070	-0,0015
73	-0,0007	0,0007	-0,0141	-0,0085	-0,0134	-0,0078
74	0,0216	0,0216	-0,0191	-0,0131	0,0025	0,0085
75	0,0006	0,0006	-0,0081	-0,0032	-0,0075	-0,0026
76	0,0081	0,0081	-0,0185	-0,0127	-0,0104	-0,0046
77	0,0106	0,0106	-0,0148	-0,0092	-0,0042	0,0014
78	0,0161	0,0161	-0,0136	-0,0076	0,0025	0,0085
79	0,0321	0,0321	-0,0109	-0,0051	0,0212	0,0270
80	0,0291	0,0291	-0,0030	0,0018	0,0261	0,0273
81	0,0015	0,0015	-0,0044	0,0004	-0,0029	0,0011
82	0,0137	0,0137	-0,0180	-0,0120	-0,0043	0,0017
83	0,0030	0,0030	-0,0120	-0,0065	-0,0090	-0,0035
84	-0,0087	0,0087	-0,0173	-0,0110	-0,0086	-0,0023
85	0,0024	0,0024	-0,0231	-0,0165	-0,0207	-0,0141
86	0,0140	0,0140	-0,0176	-0,0114	-0,0036	0,0026
87	0,0167	0,0167	-0,0119	-0,0061	0,0048	0,0106
88	0,0101	0,0101	-0,0106	-0,0046	-0,0005	0,0055

ΠΙΝΑΚΑΣ 7vii

a/a	INDEX7	INDEX 7	VaR-N _{INDEX 7}	VaR-T _{INDEX 7}	INDEX 7 + VaR-N _{INDEX 7}	INDEX 7 + VaR-T _{INDEX 7}
1	0,0048	0,0048	-0,0046	-0,0047	0,0002	0,0001
2	0,0169	0,0169	-0,0047	-0,0047	0,0122	0,0122
3	-0,0027	0,0027	-0,0037	-0,0038	-0,0010	-0,0011
4	-0,0167	0,0167	-0,0088	-0,0087	0,0079	0,0080
5	0,0081	0,0081	-0,0162	-0,0159	-0,0081	-0,0078
6	-0,0061	0,0061	-0,0100	-0,0098	-0,0039	-0,0037
7	0,0085	0,0085	-0,0131	-0,0130	-0,0046	-0,0045
8	0,0359	0,0359	-0,0089	-0,0090	0,0270	0,0269
9	0,0015	0,0015	-0,0102	-0,0101	-0,0087	-0,0086
10	-0,0133	0,0133	-0,0153	-0,0151	-0,0020	-0,0018
11	-0,0076	0,0076	-0,0192	-0,0189	-0,0116	-0,0113
12	-0,0065	0,0065	-0,0167	-0,0165	-0,0102	-0,0100
13	0,0017	0,0017	-0,0154	-0,0153	-0,0137	-0,0136
14	0,0202	0,0202	-0,0119	-0,0118	0,0083	0,0084

52	0,0026	-0,00053
51	-0,0042	-0,0027
50	-0,0065	-0,0069
49	-0,0047	-0,0065
48	-0,0027	-0,0070
47	-0,0075	-0,0047
46	-0,0034	-0,0050
45	0,0007	-0,0050
44	-0,0048	-0,0049
43	-0,0050	-0,0049
42	-0,0061	-0,0062
41	0,0069	-0,0062
40	0,0089	0,0090
39	-0,0052	-0,0053
38	-0,0078	-0,0097
37	-0,0109	-0,0110
36	-0,0113	-0,0115
35	0,0044	0,0041
34	0,0007	0,0002
33	-0,0235	-0,0236
32	0,0013	0,0171
31	-0,0096	-0,0097
30	-0,0008	-0,0009
29	0,0094	0,0094
28	0,0189	0,0189
27	-0,0001	-0,0092
26	0,0020	0,0018
25	-0,0074	-0,0076
24	-0,0062	0,0140
23	0,0048	0,0064
22	0,0064	0,0062
21	0,0183	0,0184
20	-0,0030	0,0032
19	-0,0030	0,0032
18	-0,0005	-0,0005
17	0,0005	-0,0090
16	-0,0012	-0,0012
15	0,0005	-0,0005
14	0,0044	0,0044
13	-0,0030	-0,0030
12	0,0005	0,0005
11	0,0003	0,0003
10	0,0103	0,0103
9	0,0070	0,0070
8	-0,0012	-0,0082
7	-0,0005	0,0085
6	0,0044	0,0044
5	-0,0005	-0,0074
4	0,0003	-0,0074
3	0,0005	0,0005
2	0,0003	0,0003
1	0,0005	0,0005

53	-0,0025	0,0025	-0,0057	-0,0058	-0,0032	-0,0033
54	-0,0029	0,0029	-0,0079	-0,0079	-0,0050	-0,0050
55	-0,0091	0,0091	-0,0083	-0,0083	0,0008	0,0008
56	0,0051	0,0051	-0,0114	-0,0113	-0,0063	-0,0062
57	0,0030	0,0030	-0,0075	-0,0075	-0,0045	-0,0045
58	-0,0018	0,0018	-0,0072	-0,0072	-0,0054	-0,0054
59	-0,0005	0,0005	-0,0083	-0,0083	-0,0078	-0,0078
60	0,0036	0,0036	-0,0077	-0,0077	-0,0041	-0,0041
61	0,0035	0,0035	-0,0063	-0,0063	-0,0028	-0,0028
62	0,0040	0,0040	-0,0058	-0,0059	-0,0018	-0,0019
63	-0,0044	0,0044	-0,0054	-0,0054	-0,0010	-0,0010
64	0,0013	0,0013	-0,0084	-0,0082	-0,0071	-0,0069
65	0,0060	0,0060	-0,0680	-0,0067	-0,0620	-0,0007
66	0,0106	0,0106	-0,0053	-0,0053	0,0053	0,0053
67	0,0020	0,0020	-0,0041	-0,0042	-0,0021	-0,0022
68	-0,0029	0,0029	-0,0059	-0,0059	-0,0030	-0,0030
69	0,0107	0,0107	-0,0077	-0,0076	0,0030	0,0031
70	0,0057	0,0057	-0,0049	-0,0049	0,0008	0,0008
71	0,0041	0,0041	-0,0053	-0,0053	-0,0012	-0,0012
72	-0,0115	0,0115	-0,0053	-0,0053	0,0062	0,0062
73	0,0035	0,0035	-0,0123	-0,0122	-0,0088	-0,0087
74	0,0038	0,0038	-0,0082	-0,0081	-0,0044	-0,0043
75	0,0018	0,0018	-0,0072	-0,0072	-0,0054	-0,0054
76	-0,0023	0,0023	-0,0071	-0,0070	-0,0048	-0,0047
77	0,0079	0,0079	-0,0082	-0,0082	-0,0003	-0,0003
78	-0,0001	0,0001	-0,0056	-0,0055	-0,0055	-0,0054
79	0,0131	0,0131	-0,0073	-0,0073	0,0058	0,0058
80	0,0043	0,0043	-0,0049	-0,0049	-0,0006	-0,0006
81	0,0064	0,0064	-0,0061	-0,0062	0,0003	0,0002
82	0,0116	0,0116	-0,0051	-0,0052	0,0065	0,0064
83	0,0010	0,0010	-0,0040	-0,0041	-0,0030	-0,0031
84	-0,0038	0,0038	-0,0064	-0,0063	-0,0026	-0,0025
85	0,0058	0,0058	-0,0082	-0,0082	-0,0024	-0,0024
86	0,0084	0,0084	-0,0057	-0,0057	0,0027	0,0027
87	0,0077	0,0077	-0,0047	-0,0047	0,0030	0,0030
88	0,0076	0,0076	-0,0044	-0,0044	0,0032	0,0032

a/a	INDEX 8	INDEX 8	VAR-N INDEX8	VAR-T INDEX8	INDEX 8 + VAR-N INDEX8	INDEX 8 + VAR-T INDEX8	INDEX 8 - VAR-N INDEX8	INDEX 8 - VAR-T INDEX8	INDEX 8 -0,0032	INDEX 8 -0,0029	INDEX 8 -0,0023	INDEX 8 -0,0015	INDEX 8 -0,0008	INDEX 8 -0,0005	INDEX 8 -0,0003	INDEX 8 -0,0002	INDEX 8 -0,0001
1	-0,0060	0,0060	0,0036	-0,0028	0,0024	0,0024	-0,0036	-0,0028	-0,0032	-0,0029	-0,0023	-0,0228	-0,0108	-0,0075	-0,0008	-0,0075	-0,0015
2	0,0050	0,0050	-0,0290	-0,0133	-0,0240	-0,0240	0,0062	0,0008	-0,0057	-0,0049	-0,0569	-0,0174	-0,0174	-0,0451	-0,0005	-0,0005	-0,0005
3	-0,0057	0,0057	-0,0049	-0,0118	-0,0221	-0,0221	0,0118	0,0348	-0,0571	-0,1169	-0,0174	-0,0214	-0,0214	-0,0397	-0,0995	-0,0995	-0,0995
4	-0,0569	0,0569	-0,0049	-0,0062	-0,00290	-0,0050	-0,0050	-0,0050	-0,0437	-0,0437	0,0233	0,0233	0,0194	0,0071	0,0071	0,0046	0,0046
5	-0,0174	0,0174	-0,1169	-0,0571	-0,0042	-0,0042	-0,0032	-0,0032	-0,0185	-0,0185	-0,0223	-0,0172	-0,0029	-0,0029	-0,0172	-0,0172	-0,0172
6	-0,0214	0,0214	-0,0437	-0,0061	-0,0045	-0,0045	-0,0038	-0,0038	-0,0161	-0,0161	-0,0131	-0,0138	-0,0138	-0,0052	-0,0052	-0,0052	-0,0052
7	-0,0233	0,0233	-0,0045	-0,0061	-0,0042	-0,0042	-0,0032	-0,0032	-0,0067	-0,0067	-0,0103	-0,0028	-0,0028	-0,0110	-0,0110	-0,0110	-0,0110
8	-0,0194	0,0194	-0,0042	-0,0032	-0,0042	-0,0042	-0,0037	-0,0037	-0,0069	-0,0069	-0,0033	-0,0058	-0,0125	-0,0067	-0,0067	-0,0067	-0,0067
9	-0,0071	0,0071	-0,0009	-0,0025	-0,0009	-0,0009	-0,0071	-0,0071	-0,0062	-0,0062	-0,0032	-0,0036	-0,0166	-0,0174	-0,0174	-0,0174	-0,0174
10	-0,0025	0,0025	-0,0079	-0,0054	-0,0025	-0,0025	-0,0054	-0,0054	-0,0029	-0,0029	-0,0054	-0,0054	-0,0054	-0,0029	-0,0029	-0,0029	-0,0029
11	-0,0105	0,0105	-0,0095	-0,0067	-0,0095	-0,0095	-0,0010	-0,0010	-0,0037	-0,0037	-0,0129	-0,0028	-0,0028	-0,0110	-0,0110	-0,0110	-0,0110
12	-0,0131	0,0131	-0,0038	-0,0028	-0,0038	-0,0038	-0,0103	-0,0103	-0,0061	-0,0061	-0,0028	-0,0058	-0,0161	-0,0161	-0,0133	-0,0133	-0,0133
13	-0,0204	0,0204	-0,0025	-0,0032	-0,0025	-0,0025	-0,0179	-0,0179	-0,0024	-0,0024	-0,0037	-0,0037	-0,0037	-0,0022	-0,0022	-0,0022	-0,0022
14	-0,0161	0,0161	-0,0058	-0,0028	-0,0058	-0,0058	-0,0103	-0,0103	-0,0067	-0,0067	-0,0042	-0,0058	-0,0125	-0,0125	-0,0067	-0,0067	-0,0067
15	-0,0138	0,0138	-0,0009	-0,0028	-0,0009	-0,0009	-0,0129	-0,0129	-0,0028	-0,0028	-0,0093	-0,0028	-0,0028	-0,0138	-0,0138	-0,0138	-0,0138
16	-0,0052	0,0052	-0,0015	-0,0030	-0,0015	-0,0015	-0,0103	-0,0103	-0,0037	-0,0037	-0,0129	-0,0028	-0,0028	-0,0110	-0,0110	-0,0110	-0,0110
17	-0,0125	0,0125	-0,0083	-0,0058	-0,0083	-0,0083	-0,0042	-0,0042	-0,0037	-0,0037	-0,0067	-0,0058	-0,0125	-0,0125	-0,0067	-0,0067	-0,0067
18	-0,0069	0,0069	-0,0069	-0,0036	-0,0037	-0,0069	-0,0032	-0,0032	-0,0037	-0,0037	-0,0067	-0,0036	-0,0036	-0,0033	-0,0033	-0,0033	-0,0033
19	-0,0223	0,0223	-0,0057	-0,0023	-0,0057	-0,0057	-0,0166	-0,0166	-0,0049	-0,0049	-0,0049	-0,0057	-0,0057	-0,0174	-0,0174	-0,0174	-0,0174
20	-0,0046	0,0046	-0,0108	-0,0038	-0,0108	-0,0108	-0,0046	-0,0046	-0,0062	-0,0062	-0,0062	-0,0046	-0,0046	-0,0082	-0,0082	-0,0082	-0,0082
21	-0,0163	0,0163	-0,0132	-0,0073	-0,0132	-0,0132	-0,0031	-0,0031	-0,0067	-0,0067	-0,0067	-0,0082	-0,0082	-0,0090	-0,0090	-0,0090	-0,0090
22	-0,0188	0,0188	-0,0064	-0,0036	-0,0064	-0,0064	-0,0124	-0,0124	-0,0124	-0,0124	-0,0124	-0,0188	-0,0188	-0,0152	-0,0152	-0,0152	-0,0152
23	-0,0082	0,0082	-0,0082	-0,0031	-0,0027	-0,0031	-0,0051	-0,0051	-0,0027	-0,0027	-0,0051	-0,0082	-0,0082	-0,0055	-0,0055	-0,0055	-0,0055
24	-0,0247	0,0247	-0,0061	-0,0048	-0,0061	-0,0061	-0,0166	-0,0166	-0,0048	-0,0048	-0,0048	-0,0247	-0,0247	-0,0199	-0,0199	-0,0199	-0,0199
25	-0,0151	0,0151	-0,0126	-0,0039	-0,0126	-0,0151	-0,0126	-0,0025	-0,0025	-0,0025	-0,0151	-0,0151	-0,0125	-0,0125	-0,0125	-0,0125	-0,0125
26	-0,0158	0,0158	-0,0009	-0,0032	-0,0009	-0,0158	-0,0009	-0,0149	-0,0149	-0,0149	-0,0158	-0,0158	-0,0126	-0,0126	-0,0126	-0,0126	-0,0126
27	-0,0119	0,0119	-0,0020	-0,0028	-0,0020	-0,0119	-0,0020	-0,0099	-0,0099	-0,0099	-0,0119	-0,0119	-0,0091	-0,0091	-0,0091	-0,0091	-0,0091
28	-0,0134	0,0134	-0,0021	-0,0035	-0,0021	-0,0134	-0,0021	-0,0113	-0,0113	-0,0113	-0,0134	-0,0134	-0,0099	-0,0099	-0,0099	-0,0099	-0,0099
29	-0,0144	0,0144	-0,0022	-0,0031	-0,0022	-0,0144	-0,0022	-0,0122	-0,0122	-0,0122	-0,0144	-0,0144	-0,0113	-0,0113	-0,0113	-0,0113	-0,0113
30	-0,0120	0,0120	-0,0020	-0,0030	-0,0020	-0,0120	-0,0020	-0,0087	-0,0087	-0,0087	-0,0120	-0,0120	-0,0059	-0,0059	-0,0059	-0,0059	-0,0059
31	-0,0048	0,0048	-0,0048	-0,0028	-0,0048	-0,0048	-0,0028	-0,0028	-0,0028	-0,0028	-0,0048	-0,0048	-0,0018	-0,0018	-0,0018	-0,0018	-0,0018
32	-0,0116	0,0116	-0,0036	-0,0037	-0,0036	-0,0116	-0,0036	-0,0080	-0,0080	-0,0080	-0,0116	-0,0116	-0,0079	-0,0079	-0,0079	-0,0079	-0,0079
33	-0,0110	0,0110	-0,0023	-0,0035	-0,0023	-0,0110	-0,0023	-0,0087	-0,0087	-0,0087	-0,0110	-0,0110	-0,0075	-0,0075	-0,0075	-0,0075	-0,0075
34	-0,0044	0,0044	-0,0024	-0,0036	-0,0024	-0,0044	-0,0024	-0,0020	-0,0020	-0,0020	-0,0044	-0,0044	-0,0008	-0,0008	-0,0008	-0,0008	-0,0008
35	-0,0075	0,0075	-0,0083	-0,0035	-0,0083	-0,0075	-0,0060	-0,0020	-0,0020	-0,0020	-0,0075	-0,0075	-0,0015	-0,0015	-0,0015	-0,0015	-0,0015
36	-0,0023	0,0023	-0,0251	-0,0131	-0,0251	-0,0023	-0,0131	-0,0131	-0,0131	-0,0131	-0,0023	-0,0023	-0,0018	-0,0018	-0,0018	-0,0018	-0,0018

37	0,0169	0,0169	-0,0059	-0,0070	0,0110	0,0099
38	-0,0084	0,0084	-0,0080	-0,0038	0,0004	0,0046
39	0,0093	0,0093	-0,0342	-0,0156	-0,0249	-0,0063
40	0,0087	0,0087	-0,0069	-0,0058	0,0018	0,0029
41	-0,0272	0,0272	-0,0034	-0,0045	0,0238	0,0227
42	0,0084	0,0084	-0,0662	-0,0310	-0,0578	-0,0226
43	0,0023	0,0023	-0,0154	-0,0094	-0,0131	-0,0071
44	0,0078	0,0078	-0,0103	-0,0077	-0,0025	0,0001
45	0,0086	0,0086	-0,0037	-0,0047	0,0049	0,0039
46	-0,0036	0,0036	-0,0034	-0,0043	0,0002	-0,0007
47	0,0056	0,0056	-0,0203	-0,0106	-0,0147	-0,0050
48	-0,0004	0,0004	-0,0046	-0,0054	-0,0042	-0,0050
49	-0,0025	0,0025	-0,0132	-0,0082	-0,0107	-0,0057
50	-0,0123	0,0123	-0,0138	-0,0094	-0,0015	0,0029
51	-0,0190	0,0190	-0,0301	-0,0160	-0,0111	0,0030
52	0,0050	0,0050	-0,0371	-0,0206	-0,0321	-0,0156
53	-0,0044	0,0044	-0,0084	-0,0072	-0,0040	-0,0028
54	0,0036	0,0036	-0,0198	-0,0111	-0,0162	-0,0075
55	0,0059	0,0059	-0,0054	-0,0064	0,0005	-0,0005
56	0,0052	0,0052	-0,0047	-0,0051	0,0005	0,0001
57	0,0015	0,0015	-0,0057	-0,0054	-0,0042	-0,0039
58	-0,0001	0,0001	-0,0101	-0,0071	-0,0100	-0,0070
59	-0,0010	0,0010	-0,0109	-0,0080	-0,0099	-0,0070
60	0,0129	0,0129	-0,0116	-0,0082	0,0013	0,0047
61	0,0176	0,0176	-0,0063	-0,0039	0,0113	0,0137
62	0,0043	0,0043	-0,0037	-0,0029	0,0006	0,0014
63	0,0071	0,0071	-0,0114	-0,0066	-0,0043	0,0005
64	0,0069	0,0069	-0,0040	-0,0048	0,0029	0,0021
65	0,0063	0,0063	-0,0044	-0,0048	0,0019	0,0015
66	0,0072	0,0072	-0,0049	-0,0049	0,0023	0,0023
67	0,0029	0,0029	-0,0041	-0,0046	-0,0012	-0,0017
68	0,0069	0,0069	-0,0089	-0,0066	-0,0020	0,0003
69	0,0102	0,0102	-0,0040	-0,0048	0,0062	0,0054
70	0,0059	0,0059	-0,0029	-0,0038	0,0030	0,0021
71	0,0007	0,0007	-0,0061	-0,0052	-0,0054	-0,0045
72	-0,0085	0,0085	-0,0116	-0,0077	-0,0031	0,0008
73	-0,0014	0,0014	-0,0248	-0,0134	-0,0234	-0,0120
74	0,0032	0,0032	-0,0090	-0,0085	-0,0058	-0,0053

75	-0,0102	0,0102	-0,0060	-0,0061	0,0042	0,0041
76	0,0020	0,0020	-0,0295	-0,0149	-0,0275	-0,0129
77	0,0059	0,0059	-0,0059	-0,0071	0,0000	-0,0012
78	0,0054	0,0054	-0,0045	-0,0051	0,0009	0,0003
79	0,0162	0,0162	-0,0055	-0,0053	0,0107	0,0109
80	0,0110	0,0110	-0,0059	-0,0033	0,0051	0,0077
81	-0,0003	0,0003	-0,0026	-0,0037	-0,0023	-0,0034
82	0,0072	0,0072	-0,0158	-0,0087	-0,0086	-0,0015
83	0,0012	0,0012	-0,0041	-0,0049	-0,0029	-0,0037
84	-0,0142	0,0142	-0,0115	-0,0075	0,0027	0,0067
85	0,0163	0,0163	-0,0359	-0,0180	-0,0196	-0,0017
86	0,0114	0,0114	-0,0164	-0,0066	-0,0050	0,0048
87	0,0114	0,0114	-0,0024	-0,0043	0,0090	0,0071
88	0,0034	0,0034	-0,0023	-0,0036	0,0011	-0,0002

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η πλειοψηφία των υποδειγμάτων εκτίμησης της *VaR* (αξία σε κίνδυνο) οδηγεί σε υποεκτίμηση του κινδύνου της αγοράς. Στην εφαρμογή της συγκεκριμένης εργασίας παρατηρούμε ότι τα υποδείγματα *AR(1)-N-GARCH(1,1)* και *AR(1)-T-GARCH(1,1)* συστηματικά υπερεκτιμούν τη *VaR*.

Στη βιβλιογραφία παρατηρούμε ότι τα δεσμευμένα υποδείγματα της *VaR* οδηγούν σε προβλέψεις με μεγαλύτερη διακύμανση από τα μη-δεσμευμένα. Το παραπάνω μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα στην κατανομή των κεφαλαίων για επενδυτικούς σκοπούς (*Danielsson και Morimoto, 2000*). Όσον αφορά στα πλήρως παραμετρικά υποδείγματα, λαμβάνοντας υπόψη δυναμικότητες κλίμακας (scale dynamics), παρατηρούμε σημαντική βελτίωση ως προς την ικανότητα ορθής εκτίμησης των υποδειγμάτων. Επιπλέον, την ορθότητα της εκτίμησης ενισχύει η χρήση κατανομών των καταλοίπων που να λαμβάνουν υπόψη τους χαρακτηριστικά των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών στοιχείων, όπως η ασυμμετρία και οι παχιές ουρές. Τέλος, το προτεινόμενο υποδείγματα *AR(1)-N-GARCH(1,1)* και *AR(1)-T-GARCH(1,1)* δίνουν ικανοποιητικότερα αποτελέσματα εκτίμησης από ότι το υπόδειγμα «*baseline CAViaR*».

Οι *McNeil και Frey (2000)* στο άρθρο τους διαπιστώνουν ότι το *Expected Shortfall* είναι ένα εναλλακτικό μέτρο κινδύνου με πολύ καλές στατιστικές ιδιότητες. Μία σύγκριση των εκτιμήσεων για το *Expected Shortfall* και ενός υποδείγματος *GARCH* υποθέτοντας ότι τα κατάλοιπα κατανέμονται κανονικά, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα κατάλοιπα εμφανίζουν κατανομή με παχιές ουρές, και η χρήση της *EVT* θα δώσει ορθότερες εκτιμήσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Alexander, C. (2001)** “Orthogonal GARCH” in *Mastering Risk Volume 2*, FT Prentice Hall, pp.21-38.
- Alexander, C. (2002)** “Principal component Models for Generating Large GARCH Covariance Matrices”, *Economic Notes*, 31 (2), pp. 337-359.
- Alexander, C. and A. Chibumba (1998)** “Orthogonal GARCH: An Empirical Validation on Equities, Foreign-Exchange and Interest Rates”, working paper, University of Sussex.
- Alexander, C. and C. Leigh (1997)** “On the Covariance Matrices used in Value-at-Risk Models”, *Journal of Derivatives*, 4 (3), pp. 50-62.
- Angelidis, T., Benos, A. and S., Degiannakis (2004)** “The Use of GARCH Model in VaR Estimation”, *Statistical Methodology*, Vol. 1, No 2, pp. 105-128.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. and J. Heath (1997)** “Thinking Coherently”, *Risk*, 10 (11), pp. 68-71.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. and J. Heath (1999)** “Coherent Measures of Risk”, *Mathematical Finance*, 9 (3), pp. 203-228.
- Balkema, A. and L., de Haan (1974)** “Residual Life Time at Great Age”, *Annals of Probability*, 2, pp. 792-804.
- Bams, D., Lehnert, T. and C., Wolff (2003)** “An Evaluation Framework for Alternative VaR Models”, CEPR Working Paper, University of Maastricht.
- Barone-Adesi, G., Bourgoin, F. and K. Giannopoulos (1998)** “Don’t Look Back”, *Risk*, 11 (8).
- Barone-Adesi, Giannopoulos G., and L., Vosper (1999)** “VaR without Correlations for Portfolios of Derivatives Securities”, *Journal of Futures Markets*, 19, pp. 583-602.
- Barone-Adesi, Giannopoulos G., and L., Vosper (2000)** “Filtering Historical Simulation. Backtest Analysis”, *Working Paper*, University of Westminster, March.
- Bates, J. and C., Granger (1969)** “The Combination of Forecasts”, *Operations Research Quarterly*, 20, pp. 451-468.
- Berkowitz, J. (1999)** “Evaluating the Forecasts of Risk Models”, Federal Reserve Board, March.



- Black, F. (1976)** "Studies of Stock Market Volatility Changes", Proceeding of American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section, pp. 177-181.
- Black, F. and M., Scholes (1972)** "The Valuation of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-654.
- Bollerslev, T. (1986)** "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31 (3), pp. 307-327.
- Bollerslev, T. (1987)** "A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return", *Review of Economics and Statistics*, 69, pp. 542-547.
- Bollerslev, T., Chou, R. and K., Kroner (1992)** "ARCH Modelling in Finance", *Journal of Econometrics*, 52, pp. 5-59.
- Bollerslev, T. and J., M., Wooldridge (1992)** "Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-Varying Covariances", *Econometric Reviews*, 11, pp. 143-172.
- Boudoukh, J., Richardson, M. and R., Whitelaw (1998)** "The Best of Both Worlds", *Risk* 11(May), pp. 64-67.
- Brandt, A. (1986)** "The Stochastic Equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with Stationary Coefficients", *Advanced in Applied Probability*, 18, pp. 211-220.
- Bredin, D. and S., Hyde (2002)** "Forex Risk: Measurement and Evaluation using Value-at-Risk, Central Bank of Ireland Research Technical Papers, 02/RT/06.
- Brooks, C., and G., Persand (2003)** "The Effect of Asymmetries on Stock Index Return Value-at-Risk Estimates", *The Journal of Risk Finance*, pp. 29-42.
- Chambers, J. M., Mallows, C. L. and B. W., Stuck (1976)** "A Method for Simulating Stable Random Variables", *Journal of Statistical Association*, 71, pp. 340-344.
- Chernozhukov, V. and L., Umantsev (2001)** "Conditional Value-at-Risk: Aspects of Modelling and Estimation", *Empirical Economics*, 26, pp. 271-292.
- Christoffersen, P. (1998)** "Evaluating Interval Forecasts", *International Economic Review*, 39, pp. 841-862.
- Christoffersen P., Hahn J. and A., Inoue (1999)** "Testing, Comparing and Computing Value at Risk Measures", Center for Financial Institutions Working Papers 99-44, Wharton School Center for Financial Institutions, University of Pennsylvania.
- Danielsson, J. and C. G., de Vries (2000)** "Value-at-Risk and Extreme Returns", *Annals d' Economie et de Statique*, 60, pp. 239-270.



- Danielsson, J. and Y. Morimoto (2000)** "Forecasting Extreme Financial Risk: A Critical Analysis of Practical Methods for the Japanese Market", *Monetary and Economic Studies*, 18(2), pp. 25-48.
- Davidson, R. and J., MacKinnon (1993)** "Estimation and Inference in Econometrics", Oxford University Press.
- Delbaen, F. (2001)** "Coherent Risk Measures", Lecture Notes, Pisa.
- Diebold, F. X, Schuermann, T. and J. D., Stroughair (1998)** "Pitfalls and Opportunities in the Use of Extreme Value Theory in Risk Management", Working Paper 98-10, Wharton School, University of Pennsylvania.
- Duan, J-C., (1997)** "Augmented GARCH(p,q) Process and its Diffusion Limit", *Journal of Econometrics*, 79, pp. 97-127.
- Embrechts, P. (2000)** "Extremes and Integrated Risk Management", published in association with UBS Warburg and Risk Books.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C. and T Mikosch (1997)** "Modelling External Events for Insurance and Finance", Berlin: Spring Verlag.
- Engle, R. F. (1982)** "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of Variance of U.K. Inflation", *Econometrica*, 50, pp. 987-1008.
- Engle, R. F. (2000)** "Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models", working paper, University of California, San Diego.
- Engle, R. F. and K. Kroner (1995)** "Multivariate Simultaneous GARCH" *Econometric Theory*, 11, pp. 122-150.
- Engle, R. F. and S., Manganelli (2004)** "CAViaR: Conditional Autoregressive Value-at-Risk by Regression Quantiles", *Journal of Business and Economic Statistics*, 22, pp. 367-381.
- Engle, R. F., V. Ng and M. Rothschild (1990)** "Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills", *NBER Technical Working Paper No. 65*.
- Föellmer, H. and A., Schied (2002)** "Robust Preferences and Convex Risk Measures", Advances in Finance and Stochastics, pp. 39-56, Springer-Verlag.
- Frydenberg S., Lindset S. and S., Westgaard (2006)** "Statistical Properties of Hedge Fund Returns 1994-2005", Innsendt Journal of Financial Markets and Portfolio Management for vundering.



- Giot, P. and S., Laurent (2004)** "Modelling Daily Value-at-Risk Using Realized Volatility and ARCH Type Models", *Journal of Empirical Finance*, 11, pp. 379-398.
- Gnedenko, B. (1943)** "Sur la Distribution Limite du Terme Maximum d'une Série Aléatoire", *Annals of Mathematics*, 44, pp. 423-453.
- Gouriéroux, C. (1997)** "ARCH-Models and Financial Applications", Springer Series in Statistics, Springer, New York.
- Haas, M., Mitnik, S. and M. S., Paolella (2004)** "Mixed Normal Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Financial Econometrics*, 2, pp. 211-250.
- Hansen, L. (1982)** "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators", *Econometrica*, 50, pp. 1029-1054.
- Harmatzidis, F., Chien, Y. and L., Miao (2005)** "Empirical Comparative Study for Expected Shortfall and Value-at-Risk", INFORMS Applied Probability Conference, Ottawa, Canada.
- Hendricks, D. (1996)** "Evaluation of Value-at-Risk Models using Historical Data", *Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review*, April, pp. 39-69.
- Hill, B. (1975)** "A Simple General Approach to inference about the Tail of Distribution", *Annals of Statistics*, 3, pp. 1163-1174.
- Hoel, P. G. (1954)** "A Test for Markov Chains", *Biometrika* 41, pp. 430-433.
- Hull, J. and A., White (1998)** "Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value-at-Risk", *Journal of Risk*, 1 (1), pp. 5-19.
- Hull, J. and A., White (1998)** "Value-at-Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed", *Journal of Derivatives*, 5, pp. 9-19.
- Janicki A. and A., Weron (1994)** "Simulation and Chaotic Behaviour of a-Stable Stochastic Processes, Marcel Dekker, New York.
- Kanter, M. (1975)** "Stable Densities under Change of Scale and Total Variation Inequalities", *Annals of Probability*, 3, pp. 697-707.
- Kitamura, Y. (1997)** "Comparing Misspecified Dynamic Econometric Models Using Nonparametric Likelihood", Manuscript, Department of Economics, University of Wisconsin, Madison.
- Kitamura, Y. and M., Stutzer (1997)** "Information Theoretic Alternative to Generalized Method of Moments Estimation", *Econometrica*, 65, pp. 861-874.
- Koenker, R. and G., Bassett (1978)** "Regression Quantiles" *Econometrica*, 46, pp. 33-50.



- Koenker, R. and S., Portnoy (1997)** "Quantile Regression", Working Paper 97-0100, University if Illinois at Urbana-Champaign.
- Kuester K., Mittnik, S. and M. S., Paoletta (2006)** "Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies", *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4, No. 1, pp. 53-89.
- Lévy, P., (1934)** "Sur les Intégrales dont les Éléments sont des Aléatoires Idépendantes", Ann. Scuola Norm. Pisa, 3, pp. 337-336.
- Lo A. (2001)** "Risk Management for Hedge Funds: Introduction and Overview", *Financial Analysts Journal*, 57(6), pp. 16-33.
- Longin, F. M. (2000)** "From Value-at-Risk to Stress Testing: the Extreme Value Approach", *Journal of Banking & Finance*, 24 (7), pp. 1097-1130.
- Lopez, J. (1998)** "Testing your Risk Tests", *The Financial Survey*, May-June, pp. 18-20.
- Lopez, J. (1999)** "Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates", *Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review*, 2, pp. 3-17.
- Malkier B. G. and A., Saha (2004)** "Hedge Funds: Risk and Return", Working Paper
- Manganelli S. and R., Engle (2001)** "Value at Risk Models in Finance", Working Paper Series 075, European Central Bank.
- McNeil, A. (1997)** "Estimating the Tails of Loss Severity Distributions Using Extreme Value Theory", *Theory ASTIN Bulletin*, Vol. 27, No 1, pp. 1117-1137.
- McNeil, A. (1998)** "Calculating Quantile Risk Measures for Financial Return Series Using Extreme Value Theory", Department of Mathematics, ETH, Swiss Federal Technical University, ETH E-Collection.
- McNeil, A. (1999)** "Extreme Value Theory for Risk Managers", Internal Modelling CAD II, Risk Books, pp. 93-113.
- McNeil, A. and R., Frey (2000)** "Estimation of Tail-Related risk Measures for Heteroskedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach", *Journal of Empirical Finance*, 7, pp. 271-300.
- McNeil, A. and T. Saladin (1997)** "The Peaks Over Threshold Method for Estimating High Quantiles of Loss Distributions", Proceedings of XXVIIth International ASTIN Colloquium, Cairns, Australia, pp. 23-43.
- Miazdynskaia T. and W., Ausseneegg (2005)** "Uncertainty in Value-at-Risk Estimates under Parametric and Non-parametric Modeling" (February 2005).

- Mitnik, S. and M. S., Paolella (2000)** "Conditional Density and Value-at-Risk Prediction of Asian Currency Exchange Rates", *Journal of Forecasting*, 19, pp. 313-333.
- Mitnik, S., Rachev, S. T., Doganoglu T. and D., Chenyao (1999)** "Maximum Likelihood Estimation of Stable Paretian Models", *Mathematical and Computer Modelling*, 29, pp. 275-293.
- Müller, O., Dacarogna, M., Davé, R., Olsen, R., Pictet, O. and J., von Weizsäcker (1997)** "Volatilities if Different Time Resolutions- Analyzing the Dynamics of Market Components", *Journal of Empirical Finance*, 4 (2-3), pp. 213-240.
- Nelson, D. (1991)** "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach", *Econometrica*, 59, pp. 347-370.
- Pakes, A., and D., Pollard (1989)** "Simulation and Asymptotics of Optimization Estimators", *Econometrica*, 57, pp. 1027-1057.
- Pascual, L., Romo, J. and E., Ruiz (2000)** "Forecasting Returns and Volatilities in GARCH Processes Using Bootstrap", Carlos III Working Paper.
- Pickands, J. (1975)** "Statistical Inference Using Extreme Order Statistics", *Annals of Statistics*, 3, pp. 119-131.
- Pristker, M. (1997)** "Evaluating Value at Risk Methodologies: Accuracy versus Computational Time", *Journal of Financial Services Research*, 12, pp. 201-242.
- Pristker, M. (2001)** "The Hidden Dangers of Historical Simulation", Finance and Economics Discussion Series 27. Board of Governors of the Federal Reserve System, Washington, D. C.
- RiskMetrics (1995)** *Morgan, J., P.*, Technical Document, 3rd edition. New York.
- RiskMetrics (1996)**, *Morgan, J., P.*, Technical Document, 4th edition, New York.
- Samorodnitsky, G. and M. S., Taqqu (1994)** "Stable Non-Gaussian Random Process, Stochastic Models with Infinite Variance", Chapman and Hall, New York-London.
- Sarma M., Tomas S. and A., Shah (2003)** "Selection of Value-at-Risk Models", *Journal of Forecasting*, 22(4), pp. 337-358.
- Shephard, N. (1996)** "Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility", In: Cox, D., Hinkley, D., Barndoff-Nielsen, O. (Eds.), *Time Series Modelw in Econometrics, Finance and other Fields*, Chapman and Hall, London, pp. 1-55.
- Smith, R. (1987)** "Estimating Tails of Probability Distributions", *The Annals of Statistics*, 15, pp. 1174-1207.

Stock, J. and M., Watson (1998) “A Comparison of Linear and Nonlinear Univariate Models for Forecasting Macroeconomics Times Series”, Manuscript, Kennedy School Of Government, Harvard University.

Van Der Vaart, A. W. (1998) “Asymptotic Statistics”, Cambridge University Press.

Weron (1996), On the Chambers-Mallows-Stuck Method for Simulating Skewed Stable Random Variables”, *Statistics & Probability Letters*, 28, pp. 165-171.

Zolotarev, V. M. (1986) “ One-Dimensional Stable Distributions”, Volume 65 of American Mathematical Society Translations of Mathematics Monographs, American Mathematical Society, Providence (translation of the original 1983 Russian edition).



Διάρεση

