ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΕΚΛΑΡΗ ΘΕΟΔΩΡΑ

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΚΙΝΔΥΝΟΥ σ, VAR ΚΑΙ CVAR ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Αθήνα
Ιανουάριος 2008

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΕΚΛΑΡΗ ΘΕΟΔΩΡΑ

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΚΙΝΔΥΝΟΥ σ, VAR ΚΑΙ CVAR ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Αθήνα
Ιανουάριος 2008

Εγκρίνουμε τη διατριβή της Θεοδώρας Κ. Πεκλάρη

Υπεύθυνος Καθηγητής

Αρβανίτης Στέλιος

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών — Υπογραφή

Εξεταστής Καθηγητής

Κόρδας Γρηγόρης

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών — Υπογραφή

Ημερομηνία: 28 / 01 / 2008

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ-ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Τελειώνοντας την εργασία μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά κάποια άτομα τα οποία συνέβαλλαν ουσιαστικά στη συγγραφή της. Οφείλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον Υπεύθυνο Καθηγητή κ. Αρβανίτη Στέλιο και στον Εξεταστή Καθηγητή κ. Κόρδα Γρηγόριο, καθηγητές του τμήματος Οικονομικής Επιστήμης. Ευχαριστώ θερμά τον κ.Κόρδα που με το μάθημα των Παραγώγων μου έδωσε τον έναυσμα να μελετήσω σε μεγαλύτερο βάθος την έννοια του Value-at-risk. Ευχαριστώ θερμά τον κ. Αρβανίτη για τη συνεχή καθοδήγηση και παρακολούθηση της συγγραφής της εργασίας μου, την άψογη συνεργασία που είχαμε και την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με τη γλώσσα προγραμματισμού Matlab, πεδίο άγνωστο σε εμένα μέχρι πρότινος.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τον κ. Νεοφώτιστο Γεώργιο, καθηγητή μου στα προπτυχιακά χρόνια, τη συμβουλή του οποίου εκτιμώ και εμπιστεύομαι ανεπιφύλακτα χρόνια τώρα.

Τέλος οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ από καρδιάς στην οικογένειά μου που πιστεύει σε εμένα και με στηρίζει τόσο υλικά αλλά πολύ περισσότερο ψυχολογικά σε κάθε μου προσπάθεια να πραγματοποιήσω τα όνειρά μου καθώς και για τις αρχές και την παιδεία που μου έδωσε, εφόδια ανεκτίμητα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια εισαγωγή στην έννοια και στη μεθοδολογία του Value-at-Risk καθώς και του συνεπούς μέτρου κινδύνου CVaR. Τόσο το VaR όσο και το CVaR μετρούνε την έκθεση ενός περιουσιακού στοιχείου στον κίνδυνο της αγοράς. Η ανάγκη για τη μέτρηση κινδύνου προήλθε από τους ρυθμιστές των τραπεζών και την ανάγκη για ένα υγιές και ασφαλές οικονομικό σύστημα.

Καθώς οι εταιρείες βελτιώνανε τα συστήματα μέτρησης κινδύνου, οι ρυθμιστές από την πλευρά τους απαντούσανε επανεξετάζοντας τα κεφάλαια τα οποία απαιτούνταν από τα οικονομικά ιδρύματα. Το σύμφωνο της Βασιλείας ΙΙ έρχεται να καθορίσει τις ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις που θα πρέπει να παρακρατά κάθε οικονομικός οργανισμός για να μπορεί να καλύψει τους κινδύνους της αγοράς.

Ειδικά για τις εταιρείες οι οποίες εκτίθενται σε πολλαπλών ειδών κινδύνους, το VaR αποτελεί σημείο αναφοράς για τη μέτρηση του κινδύνου. Ορίζεται ως η μέγιστη δυνητική ζημιά για μια δεδομένη πιθανότητα και σε ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα. Με πιο απλά λόγια, είναι ένας αριθμός που δηλώνει πόσα μπορεί να χάσει ένας οικονομικός οργανισμός με μια δεδομένη πιθανότητα και για ένα δεδομένο χρονικό ορίζοντα.

Το CVaR από την άλλη αποτελεί ένα εναλλακτικό μέτρο κινδύνου το οποίο έρχεται να αντικαταστήσει το VaR εκεί που το τελευταίο δεν είναι ικανό να διακρίνει μεταξύ χαρτοφυλακίων τα οποία φέρουν διαφορετικά επίπεδα κινδύνου.

Στα κεφάλαια 2 και 3 μελετάμε αναλυτικά τα δύο αυτά μέτρα κινδύνου, τα χαρακτηριστικά, τις ιδιότητές του, τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά τους. Μια σημαντική διαφορά τους είναι ότι το CVaR είναι κατά κανόνα συνεπές μέτρο κινδύνου ενώ το VaR υπό προϋποθέσεις. Στο κεφάλαιο 4 ορίζουμε τα συνεπή μέτρα κινδύνου ενώ στο 5 τα δεσμευμένα συνεπή μέτρα κινδύνου.

Στο κεφάλαιο 7 μελετάμε αναλυτικά τα χαρακτηριστικά των κατανομών των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων. Στην παρούσα εργασία κάνουμε χρήση της υπόθεσης της δεσμευμένης κανινικότητας. Η υπόθεση της δεσμευμένης κανονικότητας συλλαμβάνει κάποιο βαθμό της υπερβολικής κύρτωσης των χρηματοοικονομικών

δεδομένων αλλά τυπικά λιγότερο από αυτόν που χρειάζεται για να εξηγηθεί πλήρως η ιδιότητα των παχιών ουρών των δεδομένων. Παρόλο που για το λόγο αυτό θα πρέπει να υιοθετούνται δεσμευμένες κατανομές με παχύτερες ουρές από την κανονική, εμείς κάνουμε την υπόθεση της κανονικής κατανομής και στις δύο εφαρμογές του κεφαλαίου 9.

Λόγω της ασυμμετρίας και της υπερβολικής κύρτωσης των κατανομών των χρηματοοικονομικών αποδόσεων, το κανονικό VaR έχει τα μειονεκτήματά του ειδικά όταν εφαρμόζεται σε κερδοσκοπικά κεφάλαια. Ο συνυπολογισμός της μεταβαλλόμενης χρονικά δεσμευμένης μεταβλητότητας στη μέτρηση του VaR και του CVaR μας βοηθά στο να καθορίσουμε πιο αποτελεσματικά τη διαδικασία της πραγματικής απόδοσης. Τα πιο κοινά μοντέλα χρονικά μεταβαλλόμενης μεταβλητότητας είναι τα GARCH αν και υπόκεινται σε σημαντικούς περιορισμούς σε σχέση με τα EGARCH μοντέλα.

Στην έρευνά μας κάνουμε χρήση της προβλεπτική ικανότητα ενός EGARCH (1,1) μοντέλου για να υπολογίσουμε στη δεύτερη εφαρμογή του κεφαλαίου 9 το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο για δεδομένο επίπεδο απόδοσης. Με λίγα λόγια, εξετάζουμε ποιες θα πρέπει να είναι οι θέσεις του χαρτοφυλακίου για την καλύτερη προστασία ενάντια στον κίνδυνο (downside risk).

Τελειώνοντας, στον επίλογο αναφέρουμε ποια θα μπορούσε να είναι μια περαιτέρω έρευνα της εργασίας αυτής.

Περιεχόμενα

Σελίδα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

1.1 Ανάγκη για διαχείριση χρηματοοικονομικού κινδύνου

"Οι άνθρωποι δεν επιδιώκουν ούτε την ευτυχία ούτε την ελευθερία, ούτε τη δικαιοσύνη, αλλά πρώτα και πάνω από όλα την ασφάλεια."

Hobbes

Η απελευθέρωση των αγορών την τελευταία δεκαετία που συνοδεύεται από τη μεγάλη μεταβλητότητα των τιμών έχει δώσει κίνητρο στις τράπεζες να κρατούν «ιδιόκτητες» θέσεις (proprietary positions) και όχι απλώς να διαχειρίζονται τις «θέσεις» των πελατών τους. Το αποτέλεσμα αυτής της τάσης είναι να αναπτυχθούν θεαματικά – τόσο ποσοτικά όσο και ποιοτικά- τα αντίστοιχα τμήματα των τραπεζών (dealing rooms), η κερδοφορία των οποίων σε συγκεκριμένες περιόδους υπερκαλύπτει τα κέρδη από τις «παραδοσιακές» εργασίες.

Η παραπάνω εξέλιξη δεν αφορά μόνο τα πιστωτικά ιδρύματα αλλά και όλες τις επιχειρήσεις – εμπορικές, βιομηχανικές, κ.α που διαχειρίζονται μεγάλα χρηματικά διαθέσιμα. Η διαχείριση αυτών των διαθεσίμων, μέσω επενδύσεων σε βραχυπρόθεσμους τίτλους έτσι ώστε να εκμεταλλευτούν τις διακυμάνσεις των τιμών τους, έχει αποκτήσει βαρύνουσα σημασία που σε συγκεκριμένες χρονικές περιόδους έχει υπερκαλύψει τη σημασία των παραδοσιακών πηγών κερδοφορίας αυτών των επιχειρήσεων (π.χ. ελληνικό χρηματιστήριο 1999-2001).

Οι παραπάνω εξελίξεις έχουν αναδείξει τη σημασία της ορθής εκτίμησης των κινδύνων που αναλαμβάνονται από αυτές τις επενδύσεις. Επιπλέον, οι σύγχρονες απόψεις για τον έλεγχο και εποπτεία (regulation) του χρηματοπιστωτικού χώρου έχουν δημιουργήσει ένα νομοθετικό πλαίσιο που υποχρεώνει τράπεζες και Εταιρίες Παροχής Επενδυτικών Υπηρεσιών (ΕΠΕΥ) στην παρακράτηση ιδίων κεφαλαίων που να αντιστοιχούν στο ύψος των αναλαμβανόμενων κινδύνων από μεταβολές των τιμών των χρεογράφων (market risk). Οι κανονισμοί αυτοί έχουν υιοθετηθεί από το σύνολο των ανεπτυγμένων οικονομικά χωρών και είναι γνωστοί σαν οι «συμφωνίες της Βασιλείας» (Basle Accords). Περαιτέρω οι κανονισμοί αυτοί έχουν υιοθετηθεί, σχεδόν αυτούσιοι, από την Ευρωπαϊκή Επιτροπή σε σειρά οδηγιών (directives) και αποτελούν τμήμα του εσωτερικού δικαίου της Ελλάδας.

1.1.1 Αντικειμενικοί στόχοι, στάδια, βασικές έννοιες

Οι αντικειμενικοί στόχοι της διαχείρισης κινδύνου (risk management) σύμφωνα με τον Best είναι:

- η βελτίωση της χρηματοοικονομικής απόδοσης ενός οργανισμού και
- η εγγύηση πως ένας οργανισμός δε θα υποστεί υπερβολικές απώλειες.

Η διαχείριση κινδύνου αποτελείται από τέσσερα βασικά στάδια:

1. την κατανόηση των κινδύνων στους οποίους εκτίθεται ο χρηματοοικονομικός οργανισμός,
2. τη μέτρηση αυτών των κινδύνων,
3. τον έλεγχο του κινδύνου και
4. τη μετάδοση ή ερμηνεία της γνώσης για τον κίνδυνο.

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με το δεύτερο στάδιο, τη μέτρηση κινδύνου.

Ο Danielson προσδιορίζει τρεις βασικές έννοιες κινδύνου:

- **Μεταβλητότητα:** Το παραδοσιακό μέτρο κινδύνου που είναι ουσιαστικά ανεπαρκές για το χρηματοοικονομικό κίνδυνο. Αναφέρεται στην τυπική απόκλιση των αποδόσεων. Ωστόσο είναι εξαιρετικά παραπλανητική έννοια κινδύνου.

- **Value at Risk:** Το θεμέλιο των κανονισμών κινδύνου της αγοράς το οποίο αν και αναπόφευκτο, κάθε άλλο παρά αψεγάδιαστο είναι.
- **Συνεπή μέτρα κινδύνου:** Ο εναλλακτικός προτεινόμενος τρόπος μέτρησης κινδύνου, που δυστυχώς ενέχει δύσκολο υπολογισμό.

1.2 Ορισμός κινδύνου αγοράς

Ως κίνδυνος αγοράς θεωρείται ο κίνδυνος από τη μεταβολή της τιμής της αγοράς (market value) μιας απαίτησης ή υποχρέωσης. Η μεταβολή αυτή προκαλείται από μεταβολές του επιπέδου ή και της διακύμανσης των τιμών χρηματοοικονομικών μεταβλητών (επιτόκια, τιμές μετοχών, συναλλαγματικές ισοτιμίες, τιμές εμπορευμάτων, κ.λ.π.). Σε αντισταθμισμένες θέσεις ο κίνδυνος αγοράς ορίζεται σαν η αλλαγή της σχέσης ανάμεσα στα δύο προϊόντα που ορίζουν τη σχέση [π.χ. μελλοντικό συμβόλαιο και υποκείμενη θέση, (underlying asset)].

Ο συνολικός κίνδυνος μιας μετοχής, όπως είναι γνωστό, αποτελείται από δύο συστατικά στοιχεία. Το πρώτο ονομάζεται ***συστηματικός κίνδυνος*** (systematic risk) και προκύπτει από τη συσχέτιση που παρατηρείται στην τιμή της μετοχής σε σχέση με την πορεία της χρηματιστηριακής αγοράς ως σύνολο (π.χ., η πτώση του πληθωρισμού, όλων των άλλων μεταβλητών διατηρουμένων σταθερών, θα οδηγήσει σε αύξηση του Γενικού Δείκτη τιμών μετοχών της αγοράς με αντίστοιχη επίδραση στην τιμή της μεμονωμένης μετοχής). Το δεύτερο στοιχείο ονομάζεται ***μη-συστηματικός κίνδυνος*** (unsystematic risk) και έχει να κάνει με τους παράγοντες εκείνους που επηρεάζουν μεμονωμένα την πορεία της επιχείρησης και κατ' επέκταση της μετοχής (π.χ., αλλαγή Διοίκησης, απεργία προσωπικού, μεταβολή συνθηκών ανταγωνισμού στον κλάδο κ.ά.).

Ο ***συνολικός κίνδυνος*** (total risk) υπολογίζεται στατιστικά από τη διακύμανση των αποδόσεων μιας μετοχής i (stock return variance, σ2i), ο συστηματικός κίνδυνος από το συντελεστή beta (b) και, τέλος, η διακύμανση της διαφοράς μεταξύ της πραγματικής και προσδοκώμενης απόδοσης της μετοχής i μας δίνει το μη συστηματικό κίνδυνο αυτής (diversifiable or idiosyncratic risk, σ2ei) (Elton & Gruber, 1991).

Ποσοτικοποιημένα, ο συνολικός κίνδυνος δίνεται από την πιο κάτω εξίσωση:

```
ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ    =  ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟΣ    +  ΜΗ-ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟΣ
ΚΙΝΔΥΝΟΣ        ΚΙΝΔΥΝΟΣ           ΚΙΝΔΥΝΟΣ
```

σ2i = b2 σ2m+ σ2ei

όπου σ2m η διακύμανση της απόδοσης της αγοράς.

1.3 Ποιους αφορά

Η εκτίμηση των κινδύνων των χαρτοφυλακίων που απορρέουν από μεταβολές των τιμών των χρεογράφων είναι ένα θέμα που αφορά όσες επιχειρήσεις διαχειρίζονται χαρτοφυλάκια τίτλων με σκοπό τη μεταπώληση τους με κέρδος (trading portfolios). Δεν αφορά συνεπώς επιχειρήσεις που κατέχουν χαρτοφυλάκια τίτλων που θα διακρατηθούν μέχρι τη λήξη τους (investment portfolios).

Η μέτρηση του κινδύνου αγοράς απασχολεί μεταξύ άλλων:

1. **Τα Πιστωτικά Ιδρύματα** που στο χαρτοφυλάκιο συναλλαγών κρατούν βραχυχρόνιες θέσεις που η αξία τους μπορεί να έχει μεγάλη διακύμανση. Τα Πιστωτικά Ιδρύματα ενδιαφέρονται για μεθόδους ομαδοποίησης των συστηματικών κινδύνων (π.χ. επιτοκίου) για το σύνολο του χαρτοφυλακίου τους και για τρόπους αντιστάθμισης τους.
2. **Τους ασφαλιστικούς οργανισμούς** που έχουν κίνδυνο αγοράς για πολλά από τα στοιχεία που συνθέτουν το ενεργητικό τους (π.χ. ομόλογα).

3. **Τους θεσμικούς επενδυτές** (π.χ. εταιρίες επενδύσεων χαρτοφυλακίου) οι οποίοι αναλαμβάνουν κινδύνους αγοράς σχεδόν για το σύνολο του ενεργητικού τους και εκείνο που τους ενδιαφέρει περισσότερο είναι ο σχετικός κίνδυνος που εκφράζεται σαν την απόκλιση των αποδόσεων των επενδύσεων τους από την αντίστοιχη απόδοση κάποιου επιλεγμένου δείκτη / στόχου (benchmark).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: VALUE AT RISK

2.1 Εισαγωγή

Το VaR έγινε δημοφιλές στους οργανισμούς συναλλαγών κατά τη διάρκεια του 1990. Ήταν τότε που η ονομασία " value at risk " εισήχθη στα χρηματοοικονομικά λεξικά. Παρόλ' αυτά, VaR μέτρα χρησιμοποιούνταν πολύ πριν από τότε. Ένας από τους πρώιμους χρήστες ήταν ο Harry Markowitz. Στη διατριβή του "Επιλογή Χαρτοφυλακίου "-"Portfolio Selection"- , υιοθέτησε ένα VaR μέτρο κινδύνου μιας περιόδου διασποράς των αποδόσεων και το χρησιμοποίησε προκειμένου να αναπτύξει τεχνικές για τη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου.

Στις αρχές του 1990 τρία γεγονότα ήταν αυτά τα οποία έκαναν δημοφιλές το VaR και το πλέον πρακτικό εργαλείο για τη χρήση του στις συναλλαγές:

1. Το 1993 η ομάδα των 30 δημοσίευσε μια αναφορά πάνω στις πρακτικές / εφαρμογές των παραγώγων. Η επιρροή της ήταν μεγάλη και βοήθησε στο να διαμορφωθεί το ανερχόμενο πεδίο της διαχείρισης του χρηματοοικονομικού κινδύνου. Προωθήθηκε η χρήση του VaR από τους dealers των παραγώγων και ουσιαστικά ήταν η πρώτη δημοσίευση που χρησιμοποιούσε τη φράση " value at risk ".

2. Το 1994, η JP Morgan λάνσαρε την υπηρεσία της Risk Metrics δωρεάν. Αυτό έγινε με σκοπό να προωθηθεί η χρήση του value at risk μεταξύ των καθιερωμένων πελατών της εταιρείας. Διατίθονταν προς χρήση ένα τεχνικό κείμενο το οποίο εξηγούσε πώς να θέσεις σε εφαρμογή ένα μέτρο κινδύνου VaR καθώς και ο πίνακας συνδιασποράς για διάφορες εκατοντάδες παράγοντες που ανανεώνονταν καθημερινά στο ίντερνετ.

3. Το 1995 η Επιτροπή της Βασιλείας για την εποπτεία της τραπεζικής λειτουργίας, έθεσε σε εφαρμογή τις κεφαλαιακές απαιτήσεις για τις τράπεζες λόγω κινδύνου της αγοράς. Αυτές ήταν βασισμένες σε ένα ακατέργαστο μέτρο

VaR, αλλά η επιτροπή ενέκρινε σαν εναλλακτικό τη χρήση από τις τράπεζες των δικών τους VaR μέτρων για συγκεκριμένες περιστάσεις.

Αυτές οι τρεις πρωτοβουλίες ήρθαν κατά τη διάρκεια μιας περιόδου υψηλού ενδιαφέροντος για τους συστηματικούς κινδύνους λόγω της ανερχόμενης – και σε μεγάλο βαθμό ασυντόνιστης – αγοράς παραγώγων (Over The Counter derivatives market). Ήταν επίσης μια περίοδος που ένας μεγάλος αριθμός οργανισμών - συμπεριλαμβανομένων της Orange County, Barings Bank, και Metallgesellschaft - υφίστανται υπερβολικές ζημιές λόγω περίεργων συναλλαγών και αποτυγχάνανε στο να ισοσταθμίσουνε (hedging) προγράμματα ή παράγωγα. Η διαχείριση του χρηματοοικονομικού κινδύνου ήταν πλέον προτεραιότητα για τις εταιρείες και το value at risk πολύ γρήγορα αποτέλεσε το εργαλείο σύμφωνα με το οποίο γινότανε η ποσοτικοποίηση του κινδύνου. Χρησιμοποιήθηκε από χρηματοοικονομικές εταιρείες, εταιρικά ταμεία, εμπόρους αγαθών και ενέργειας κ.α.

2.2 Ορισμός του VaR

Η αξία σε κίνδυνο (value at risk) είναι μια στατιστική μέθοδος μέτρησης του κινδύνου αγοράς (market risk). Υπολογίζει την ανώτατη ζημιά την οποία μπορεί να υποστεί ένα χαρτοφυλάκιο χρεογράφων-τίτλων, για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης και σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Αποτελεί ένα δυναμικό εργαλείο για τον υπολογισμό του κινδύνου της αγοράς, αλλά επίσης προβάλει και μία πρόκληση. Η δύναμη της προέρχεται από την γενικότητα της. Όλα τα ρευστά περιουσιακά στοιχεία έχουν αβέβαιη αγοραία αποτίμηση, η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί με μια κατανομή πιθανοτήτων των τιμών αυτής της αποτίμησης.

Όλες οι πηγές των κινδύνων αγοράς συμβάλλουν στη δημιουργία αυτής της κατανομής πιθανοτήτων. Καθώς είναι εφαρμόσιμη σε όλα τα ρευστά περιουσιακά στοιχεία και συμπεριλαμβάνει, τουλάχιστον θεωρητικά, όλες τις πηγές κινδύνων της αγοράς, η αξία σε κίνδυνο είναι ένα μέτρο ολοκληρωτικής κάλυψης των κινδύνων της αγοράς.

Με την αξία σε κίνδυνο (VaR) επιχειρούμε σε ένα μόνο αριθμό να συνοψίσουμε το συνολικό κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου αποτελούμενο από χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία. Πολλές φορές έχει επισημανθεί ότι χαρακτηρίζοντας τον κίνδυνο με " ένα μόνο αριθμό " εμπεριέχει μεγάλη απώλεια πληροφορίας. Παρόλ'αυτά, η πραγματική απόφαση σχετικά με το να πάρεις κάποιο ρίσκο ή με το να επιτρέψεις σε κάποιο να το πάρει έχει μόνο δύο δυνατές απαντήσεις: " ναι ή όχι ". Αυτό ακριβώς αποτελεί και την αληθινή αρχή της μέτρησης κινδύνου.

Όταν κάποιος διαχειριστής χαρτοφυλακίου χρησιμοποιεί το VaR ως μέτρο πρόβλεψης κινδύνου τότε είναι σα να πρόκειται να θέλει να κάνει μια δήλωση της ακόλουθης μορφής:

'' Είμαστε α τοις εκατό σίγουροι ότι δεν θα χάσουμε περισσότερα από $VaR_{N,a}$ ευρώ τις επόμενες Ν ημέρες. ''

Παράμετροι της value at risk είναι:

- Η χρονική περίοδος Ν διακράτησης των χρεογράφων-τίτλων.
- Το επίπεδο εμπιστοσύνης α, παραδείγματος χάριν: 95% ή 90% στην περίπτωση ανάληψης μεγαλύτερων κινδύνων.
- Η μονάδα του νομίσματος που θα χρησιμοποιηθεί για να μετρήσει την value at risk. Μπορεί να είναι οποιοδήποτε νόμισμα και αυτό καλείται βάση νομίσματος.

Συχνά το VaR υπολογίζεται για χρονική περίοδο μιας ημέρας – γνωστή ως η περίοδος διακράτησης (holding period) – και συνήθως υπολογίζεται με 99% επίπεδο εμπιστοσύνης που σημαίνει πως (κατά μέσο όρο) υπάρχει 99% πιθανότητα να έχουμε απώλεια μικρότερη ή ίση από την υπολογισμένη VaR.

Ο ορισμός της περιόδου διακράτησης είναι αρκετά σημαντικός επειδή όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος διακράτησης ενός χαρτοφυλακίου, τόσο μεγαλύτερη είναι και η αξία σε κίνδυνο. Το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι επίσης σημαντικό καθώς αν μια τράπεζα ορίζει

95% επίπεδο εμπιστοσύνης αυτό σημαίνει πως το υπόλοιπο 5% αντιστοιχεί σε μία ημέρα στις 20 ενώ αν ορίσει 99% επίπεδο εμπιστοσύνης αυτό σημαίνει πως το υπόλοιπο 1% αντιστοιχεί σε μία ημέρα στις 100, δηλαδή σε γεγονότα που συμβαίνουν μία φορά κάθε 4 μήνες περίπου.

Δεδομένου ότι το VaR υποθέτει ότι η σύνθεση και το ύψος του χαρτοφυλακίου μένουν αμετάβλητα για τη περίοδο που καλύπτει η μέτρηση, ο χρονικός ορίζοντας καθορίζεται από την επενδυτική πολιτική που έχει κάθε χαρτοφυλάκιο. Για παράδειγμα ένα πιστωτικό ίδρυμα με πολύ χαμηλή μέση χρονική διάρκεια υποχρεώσεων θα ενδιαφέρεται να έχει και μικρή διάρκεια στο χαρτοφυλάκιο συναλλαγών του όποτε επενδύει σε χρεόγραφα υψηλής ρευστότητας με αποτέλεσμα να υπολογίζει το κίνδυνο σε ημερήσια βάση.

Όπως και για κάθε εξάλλου στατιστική εκτίμηση, για να εμπιστευτεί κάποιος ένα μέτρο κινδύνου θα πρέπει όλες οι προσεγγίσεις και οι υποθέσεις οι οποίες γίνονται για την εκτίμηση να είναι υπό έλεγχο έτσι ώστε ο τελικός χρήστης του μέτρου να είναι ενήμερος για αυτές και επομένως να ξέρει αν μπορεί να βασιστεί στα αποτελέσματα. Όπως κάθε πολύπλοκο εργαλείο ανάλυσης έτσι και το VaR μπορεί να μας εξασφαλίσει πολύτιμη πληροφόρηση όταν χρησιμοποιείται σωστά ενώ μπορεί να γίνει πολύ επικίνδυνο στα λάθος χέρια.

<u>Ορισμός 1 (VaR):</u> Η ημερήσια αξία σε κίνδυνο για ένα χρηματοοικονομικό χαρτοφυλάκιο είναι η ημερήσια χρηματική ζημιά η οποία είναι πολύ πιθανό να ξεπεραστεί (1-α)100% του χρόνου. Είναι ο αριθμός εκείνος ο οποίος λύνει την εξίσωση:

$$F_x(-\mathrm{VaR}_a) = \alpha$$

2.3 Υπολογισμός του VaR για μία μόνο μετοχή

Συμβολίζουμε:

S: η αξία (τιμή) του χρηματοοικονομικού περιουσιακού στοιχείου

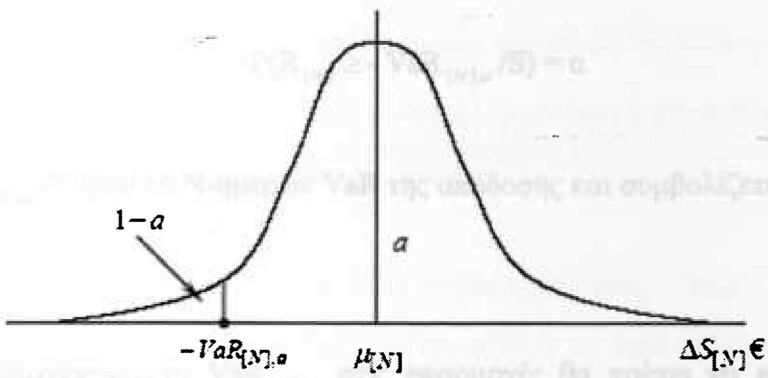
ΔS: η μεταβολή της τιμής αυτής

Τότε εξ'ορισμού, η αξία σε κίνδυνο της 1 ημέρας του περιουσιακού στοιχείου σε 100α% επίπεδο εμπιστοσύνης είναι ο αριθμός $VaR_{[1],a}$ για τον οποίο ισχύει:

$$P(\Delta S_{[1]} \geq - VaR_{[1],a}) = \alpha$$

Ανάλογα για το N-ημερών value-at-risk έχουμε:

$$P(\Delta S_{[N]} \geq - VaR_{[N],a}) = \alpha$$



Σχήμα 1: Η κατανομή της μεταβολής της τιμής μιας μετοχής N-ημερών και το N-ημερών VaR σε επίπεδο εμπιστοσύνης 100α%.

Το $VaR_{[N[,a}$ είναι απλά το (1-α) ποσοστημόριο (quantile) της κατανομής $\Delta S_{[N]}$. Από τη στιγμή που το $\Delta S_{[N]}$ μετριέται σε ευρώ, το $VaR_{[N],a}$ είναι ένα χρηματικό ποσό και από τη στιγμή που το (1-α) ποσοστημόριο θα είναι πάντα ένας αρνητικός αριθμός, παίρνουμε το αρνητικό του προκειμένου να το κάνουμε θετικό και το ονομάζουμε ζημιά αντί για κέρδος.

<u>Παράδειγμα 1:</u>

Για N=7 και 100α% = 99% το $VaR_{[7],0,99}$ είναι η μέγιστη εβδομαδιαία ζημιά με πιθανότητα 99%. Εβδομαδιαίες ζημιές μεγαλύτερες από $VaR_{[7],0,99}$ είναι φυσικά πιθανές, αλλά θα συμβούν με πιθανότητα 1% ή μία φορά κάθε 100 εβδομάδες ή περίπου μία φορά κάθε 100 χρόνια.

Αυτό που θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ είναι ότι εμείς συνηθίζαμε να δουλεύουμε με τις αποδόσεις μιας μετοχής ($R_{[N]} = \frac{\Delta S_{[N]}}{S}$) και όχι με τις μεταβολές της τιμής της $\Delta S_{[N]}$. Η επιλογή του να δουλέψουμε με το $\Delta S_{[N]}$ αντί του $R_{[N]}$ οφείλεται κυρίως στην επιθυμία μας να πάρουμε εκτιμήσεις του VaR που να μετρούνται σε ευρώ. Θα μπορούσαμε όμως πολύ εύκολα να εργαστούμε και με τις αποδόσεις.

Πράγματι από τη στιγμή που το S είναι γνωστό, ισχύει το εξής:

$$P(R_{[N]} \geq - VaR_{[N],a} / S) = \alpha$$

όπου $VaR_{[N],a}/S$ είναι το Ν-ημερών VaR της απόδοσης και συμβολίζεται με $R\text{-}VaR_{[N],a}$.

Για να υπολογίσουμε το $VaR_{[N],a}$ στις εφαρμογές θα πρέπει να εκτιμήσουμε την κατανομή του $\Delta S_{[N]}$. Η συνήθης εκτίμηση η οποία γίνεται είναι ότι το $\Delta S_{[N]}$ ακολουθεί κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή(είναι κανονικό). Δηλαδή η μεταβολή της αξίας της μετοχής έχει Ν-ημερών μέσο $\mu_{[N]}$ και Ν-ημερών διασπορά $\sigma^2_{[N]}$. Δηλαδή:

$$\Delta S_{[N]} \sim N(\mu_{[N]}, \sigma^2_{[N]})$$

Κάτω από αυτή την υπόθεση, το VaR των Ν-ημερών σε 100α% επίπεδο εμπιστοσύνης δίνεται από τη σχέση:

$$VaR_{[N],a} = z_a \sigma_{[N]} - \mu_{[N]} \qquad \text{σχέση (1)}$$

Όπου z_a είναι ο αριθμός για τον οποίο η πιθανότητα η τυπική κατανομή να είναι μικρότερη από αυτό τον αριθμό είναι ίση με α. Κάτω επομένως από την υπόθεση κανονικότητας αυτά που χρειαζόμαστε προκειμένου να υπολογίσουμε το $\mathrm{VaR}_{[N],a}$ είναι μόνο οι εκτιμήσεις του $\mu_{[N]}$ και του $\sigma_{[N]}$.

Απόδειξη της σχέσης (1):

Ένα από τα βασικά προβλήματά μας είναι ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F_x είναι άγνωστη. Για να επιλύσουμε την εξίσωση $F_x(-\mathrm{VaR}_a) = \alpha$ και να βρούμε το VaR_a, θα βοηθήσει πολύ να κάνουμε κάποιες υποθέσεις σχετικά με τη συνάρτηση κατανομής F_x που να συνδέεται με τη συνολική ζημιά του χαρτοφυλακίου. Αρχικά θα κάνουμε την υπόθεση της κανονικής κατανομής.

Ορισμός 2 (Κανονικής Κατανομής): Μία τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι έχει κανονική κατανομή με μέσο $\mu \in \Re$ και διακύμανση $\sigma^2 > 0$ αν έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_x : \Re \to [0,1]$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{F_x(\hat{x}) = \mathrm{Prob}(X \le \hat{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\hat{x}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)dx \qquad (1)}$$

και τότε λέμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Θέτοντας με $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$F_x(\hat{x}) = \mathrm{Prob}(X \le \hat{x}) = \mathrm{Prob}\left(Z \le \frac{\hat{x}-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\frac{\hat{x}-\mu}{\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)\sigma dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\hat{x}-\mu}{\sigma}} \phi(z)dz$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

είναι η τυπική κανονική πυκνότητα με μέσο 0 και διακύμανση 1, δηλαδή Z ~ N(0,1)

Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής είναι η:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\hat{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz = \int_{-\infty}^{\hat{z}} \phi(z)dz$$

Επομένως $F_x(\hat{x}) = \Phi\left(\frac{\hat{x}-\mu}{\sigma}\right)$.

Το κανονικό-VaR_a (normal-VaR_a) είναι ο μοναδικός αριθμός ο οποίος ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$F_x(-VaR_a) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{-VaR_a} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)dx = \alpha$$

Θέτοντας $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ έχω:

$$\Phi\left(\frac{-VaR_a-\mu}{\sigma}\right) = \alpha \Leftrightarrow \Phi^{-1}\ \Phi\left(\frac{-VaR_a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi^{-1}(\alpha) \Leftrightarrow \frac{-VaR_a-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$-VaR_\alpha - \mu = \sigma\,\Phi^{-1}(\alpha) \Leftrightarrow -VaR_\alpha = \mu + \sigma\,\Phi^{-1}(\alpha) \Leftrightarrow \boxed{-VaR_\alpha = \mu + \sigma\, z_\alpha}$$

<u>**Σημειώσεις:**</u>

1. $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow X = \sigma Z + \mu$

   $dX = \sigma\, dZ$

2. Ο αριθμός $\Phi^{-1}(\alpha)$ είναι απλά ένας βαθμωτός παράγοντας, συγκεκριμένα είναι ο αντίστροφος της τυπικής κανονικής κατανομής.

Παρατήρηση 1: Η εκτίμηση του μέσου $\mu_{[N]}$ και της διακύμανσης $\sigma_{[N]}$ των N-ημερών μπορούν εύκολα να μετατραπούν σε οποιαδήποτε εκτίμηση των M-ημερών μέσω των παρακάτω σχέσεων:

$$\boxed{\mu_{[M]} = \frac{M}{N}\mu_{[N]}} \text{ και } \boxed{\sigma_{[M]} = \sqrt{\frac{M}{N}}\,\sigma_{[N]}}$$

$$\text{και } \boxed{\mathrm{VaR}_{[M],a} = z_a \sqrt{\frac{M}{N}}\,\sigma_{[N]} - \frac{M}{N}\mu_{[N]}}$$

Παρατήρηση 2: Σε πολλές εφαρμογές, επιθυμούμε την εκτίμηση του VaR στη διάρκεια ενός μικρού χρονικού ορίζοντα, όπως για παράδειγμα μιας ημέρας ή μιας εβδομάδας. Επομένως κάνει νόημα να υποθέσουμε ότι το $\mu_{[N]} \cong 0$ και έτσι με μια καλή προσέγγιση να πούμε ότι το $\mathrm{VaR}_{[N],a}$ ισούται με $\boxed{\mathrm{VaR}_{[N],a} \cong z_a\,\sigma_{[N]}}$.

Εκτός από το γεγονός ότι τώρα πια δε χρειάζεται να εκτιμήσουμε το $\mu_{[N]}$, αυτή η απλούστευση έχει το επιπλέον πλεονέκτημα ότι από τη στιγμή που $\sigma_{[M]} = \sqrt{\frac{M}{N}}\,\sigma_{[N]}$, μπορούμε εύκολα να μετατρέψουμε κάθε εκτίμηση του VaR N-περιόδων σε μια άλλη εκτίμηση M-περιόδων χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\boxed{\mathrm{VaR}_{[M],a} \cong \sqrt{\frac{M}{N}}\,\mathrm{VaR}_{[N],a}}$$

Παρόλο που η υπόθεση της κανονικότητας απλοποιεί πολύ τον υπολογισμό του VaR, οι παρατηρούμενες μεταβολές των τιμών των περιουσιακών στοιχείων έχουν μη-κανονικά χαρακτηριστικά όπως μη –μηδενική ασυμμετρία και παχιές ουρές. Για να χειριστούμε τη μη-κανονικότητα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ιστορικά δεδομένα για να εκτιμήσουμε την κατανομή του $\Delta S_{[N]}$ ή του $R_{[N]}$ απευθείας.

2.4 Υπολογισμός του VaR ενός χαρτοφυλακίου μετοχών

Προκειμένου να μετρήσουμε το κίνδυνο της αγοράς σε ένα χαρτοφυλάκιο χρησιμοποιώντας την αξία σε κίνδυνο, πρέπει να βρεθούν κάποια μέτρα έτσι ώστε να καθοριστεί η κατανομή πιθανότητας του κινδύνου της αγοράς του χαρτοφυλακίου. Προφανώς, όσο πιο σύνθετο είναι ένα χαρτοφυλάκιο, δηλαδή όσες πιο πολλές και διαφορετικές κατηγορίες περιουσιακών στοιχείων έχει, τόσο πιο προκλητικό γίνεται το καθήκον.

Έστω ότι έχουμε κ- μετοχές .Συμβολίζουμε με $w = (w_1, w_2, \ldots, w_\kappa)$: το διάνυσμα του αριθμού των μετοχών κάθε περιουσιακού στοιχείου, και με $\Delta S_{[N]} = (\Delta S^1_{[N]}, \ldots, \Delta S^\kappa_{[N]})$: το τυχαίο διάνυσμα της μεταβολής της αξίας των N-ημερών των κ-περιουσιακών στοιχείων.
Επίσης έστω P: η αξία του χαρτοφυλακίου

Τότε η μεταβολή των N-ημερών στην αξία του χαρτοφυλακίου δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\Delta P_{[N]} = w' \Delta S_{[N]} = \sum_{i=1}^{\kappa} w_i \Delta S^i_{[N]}}$$

Για να βρούμε το VaR του χαρτοφυλακίου υποθέτουμε ότι το $\Delta S_{[N]}$ κατανέμεται από κοινού κανονικά:

$$\Delta S_{[N]} \sim MVN_\kappa(\mu_{[N]}, \Sigma_{[N]})$$

$\mu_{[N]} = (\mu^1_{[N]}, \ldots, \mu^\kappa_{[N]})$: το διάνυσμα του μέσου της μεταβολής των τιμών των N-ημερών και

$$VCM = \Sigma_{[N]} = \begin{bmatrix} (\sigma^1_{[N]})^2 & (\sigma^{12}_{[N]}) & (\sigma^{1\kappa}_{[N]}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma^{\kappa 1}_{[N]} & \ldots & (\sigma^\kappa_{[N]})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma^1_{[N]})^2 & \rho^{12}_{[N]}\sigma^1_{[N]}\sigma^2_{[N]} & (\sigma^{1\kappa}_{[N]}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho^{\kappa 1}_{[N]}\sigma^\kappa_{[N]}\sigma^1_{[N]} & \ldots & (\sigma^\kappa_{[N]})^2 \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας διακύμανσης – συνδιακύμανσης (VCM: Variance - Covariance Matrix)

Από τη στιγμή που ο γραμμικός συνδυασμός των από κοινού κανονικών κατανομών τυχαίων μεταβλητών είναι επίσης κανονική τυχαία μεταβλητή ισχύει:

$$\Delta P_{[N]} \sim N(\mu_{[N]}^{P}, (\sigma_{[N]}^{P})^2)$$

όπου $\mu_{[N]}^{P} = w' \mu_{[N]} = \sum_{i=1}^{\kappa} w_i \mu_{[N]}^{i}$

και $(\sigma_{[N]}^{P})^2 = w' \Sigma_{[N]} w = \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{j=1}^{\kappa} w_i \rho_{[N]}^{ij} \sigma_{[N]}^{i} \sigma_{[N]}^{j}$

Τελικά, το VaR των N-ημερών σε επίπεδο εμπιστοσύνης 100α% για ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο ισούται με:

$$\boxed{VaR_{[N],a}^{P} = \mu_{[N]}^{P} + z_a \sigma_{[N]}^{P}}$$

Μπορούμε επίσης να το γράψουμε σαν μια συνάρτηση των σταθμίσεων του χαρτοφυλακίου ως εξής:

$$\boxed{VaR_{[N],a}^{P} = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \Phi^{-1}(\alpha)}}$$

όπου $\sigma_{ij} = cov(x_i, x_j) \quad 1 \le i, j \le n$.

<u>Παρατήρηση 3</u>: Τα βασικά στατιστικά ζητήματα της μεθόδου είναι:

1) Η μεταβλητότητα των τιμών (volatility)

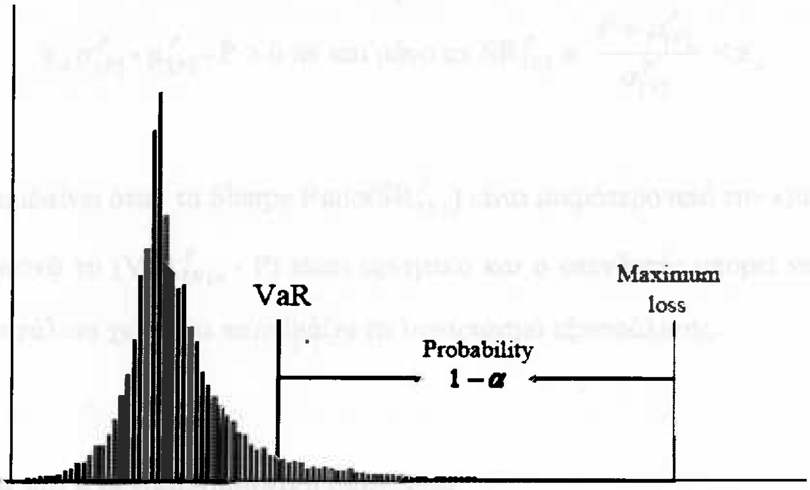
2) Η συσχέτιση (correlation)-η οποία δείχνει πώς κινείται ένας επενδυτικός τίτλος συγκριτικά με την τιμή ενός άλλου τίτλου. Η καλύτερη συσχέτιση είναι στο –1

που σημαίνει ότι όταν ανεβαίνει η τιμή ενός τίτλου του χαρτοφυλακίου μας, πέφτει η τιμή ενός άλλου τίτλου μας, γεγονός που περιορίζει τους κινδύνους. Το +1 σημαίνει ότι και οι δύο τίτλοι κινούνται παράλληλα ενώ το –0,2 σημαίνει ότι εάν η τιμή του ενός τίτλου αυξηθεί κατά 20% σε σχέση με το μέσο του, η τιμή του άλλου θα μειωθεί σε σχέση με το μέσο του κατά 20%.

3) Η κανονικότητα(normality) που προϋποθέτει ότι οι αποδόσεις των επενδυόμενων περιουσιακών στοιχείων ακολουθούν μία κανονική κατανομή.

Τα περισσότερα μοντέλα στη βιβλιογραφία εστιάζουν στον υπολογισμό του VaR για αρνητικές αποδόσεις. Στην πραγματικότητα υποθέτουμε ότι οι traders και οι διαχειριστές χαρτοφυλακίων παίρνουν θέση 'long', δηλαδή αγοράζουν το περιουσιακό στοιχείο το οποίο γίνεται αντικείμενο διαπραγμάτευσης και επομένως ανησυχούν για πτώση της τιμής του. Επομένως εδώ ο κίνδυνος προέρχεται από την πτώση της τιμής του περιουσιακού στοιχείου. Άρα σε αυτή την περίπτωση εστιάζουμε στις αρνητικές αποδόσεις, δηλαδή στην αριστερή πλευρά της κατανομής.

Ωστόσο μπορούμε να υπολογίσουμε το VaR όταν ο επενδυτής έχει λάβει αντίθετη θέση απέναντι στο υποκείμενο προϊόν (short selling) και δεν επιθυμεί άνοδο των τιμών γιατί θα αναγκαστεί να το αγοράσει σε υψηλότερη τιμή από ότι το πούλησε. Επομένως σε αυτή την περίπτωση εστιάζουμε στις θετικές αποδόσεις, δηλαδή στη δεξιά πλευρά της κατανομής για να υπολογίσουμε το VaR. (η επίδοση ενός μοντέλου που προβλέπει το VaR σχετικά με τη 'short' θέση βασίζεται στην ικανότητά του να λαμβάνει υπόψην του μεγάλες θετικές αποδόσεις)



Σχήμα 2: Η κατανομή των κερδών για ένα 'short only' χαρτοφυλάκιο.

Αν δηλώσουμε με P την αξία ενός long-only χαρτοφυλακίου, το ποσό ($VaR^{P}_{[N],a}$ - P) ευρώ μπορούμε να το σκεφτούμε ως το margin requirement για το χαρτοφυλάκιο αυτό. Αυτό το ποσό θα πρέπει να κατατεθεί σε έναν τραπεζικό λογαριασμό για να εξισορροπήσει πιθανές αντίθετες κινήσεις στις τιμές των μετοχών του χαρτοφυλακίου. Λέγοντας αντίθετες κινήσεις εννοούμε τις κινήσεις των τιμών που συμβαίνουν με πιθανότητα (1-α).

Για long-only χαρτοφυλάκιο το ποσό ($VaR^{P}_{[N],a}$ - P) θα είναι φυσικά αρνητικό, πράγμα που σημαίνει ότι ο επενδυτής μπορεί να χρησιμοποιήσει το ποσό αυτό σαν εξασφάλιση ενάντια σε κάποια άλλη θέση που μπορεί να έχει πάρει.

Αντιθέτως ένα short-only χαρτοφυλάκιο θα έχει θετικό ($VaR^{P}_{[N],a}$ - P), δηλαδή ο επενδυτής θα πρέπει να καταθέσει χρήματα στο λογαριασμό εξασφάλισης. Αν έχουμε ανάμιξη long – short χαρτοφυλακίων μπορεί το ποσό αυτό να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό.

Πράγματι, η απαιτούμενη εξασφάλιση είναι μη-αρνητική, δηλαδή:

$$z_a \sigma^P_{[N]} - \mu^P_{[N]} - P > 0 \text{ αν και μόνο αν } SR^P_{[N]} \equiv \frac{P + \mu^P_{[N]}}{\sigma^P_{[N]}} < z_a$$

το οποίο συμβαίνει όταν το Sharpe Ratio($SR^P_{[N]}$) είναι μικρότερο από την κριτική τιμή z_a. Διαφορετικά το ($VaR^P_{[N],a}$ - P) είναι αρνητικό και ο επενδυτής μπορεί να δανειστεί επιπλέον κεφάλαια χωρίς να παραβιάζει το λογαριασμό εξασφάλισης.

2.5 Το VaR και η θετική-γραμμική ομογένεια

Η αξία σε κίνδυνο υπολογισμένη για μια τυχαία μεταβλητή απώλειας χαρτοφυλακίου δίνεται από το VaR_a που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\text{Prob}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq VaR_a) = \alpha$$

Αλλάζοντας επομένως τις σταθμίσεις (weights) στο χαρτοφυλάκιο αλλάζει η τυχαία μεταβλητή και η αξία σε κίνδυνο. Ένα από τα καθήκοντα του διαχειριστή κινδύνου (risk manager) είναι να ερμηνεύσει και να αντιδράσει αποφασιστικά στο σχεδιάγραμμα του VaR. Μία απόφαση μπορεί να είναι να αυξηθεί το παρακρατηθές κεφάλαιο το οποίο να χρησιμοποιηθεί για δυνητικές ζημιές. Εναλλακτικά, μπορεί να αποφασιστεί να αυξηθεί (ή να μειωθεί) η έκθεση ενός συγκεκριμένου ή μιας ομάδας περιουσιακών στοιχείων.

Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό γράφουμε:

$$VaR_a = VaR_a(w_1, \ldots, w_n)$$

Έχοντας λ>0 και αυξάνοντας (ή μειώνοντας) τις θέσεις μας έτσι ώστε $\alpha_i \rightarrow \lambda\, \alpha_i$ για i = 1,. . ., n, τότε ανάλογα $VaR_a \rightarrow \lambda\, VaR_a$ από τη στιγμή που ισχύει:

$$\text{Prob}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda w_i) x_i \leq \lambda VaR_a) = \alpha$$

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathrm{VaR}_a(\lambda\, w_1, \ldots, \lambda w_n) = \lambda \mathrm{VaR}_a(w_1, \ldots, w_n)$$

Αυτή η ιδιότητα έχει όνομα.

<u>Ορισμός 3:</u> <u>(Γραμμική ομογένεια)</u>: Μια συνάρτηση $f(x_1, \ldots, x_n)$ καλείται γραμμικά ομογενής εάν:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \ldots, x_n), \text{ για όλα τα } \lambda>0$$

Λόγω αυτού, το VaR είναι μια γραμμικά ομογενής συνάρτηση των θέσεών του.

2.6 Το VaR και η υποπροσθετικότητα

Απόδειξη ότι το VaR ικανοποιεί την ιδιότητα subadditivity υπό συνθήκες κανονικής κατανομής:

<u>Πρόταση 1</u>: Έστω X_t, Y_t απεικονίζουν ημερήσιες τυχαίες μεταβλητές ζημιάς δύο διαφορετικών χαρτοφυλακίων. Υποθέτουμε ότι $X_t \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $Y_t \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ Υπό την υπόθεση κανονικότητας ισχύει η ιδιότητα της προσθετικότητας. Δηλαδή:

$$\mathrm{VaR}_a(X_t + Y_t) \leq \mathrm{VaR}_a(X_t) + \mathrm{VaR}_a(Y_t)$$

<u>Απόδειξη</u>:

$$X_t \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \Rightarrow \mathrm{VaR}_a(X_t) = \mu_X + z_a \sigma_X$$

$$Y_t \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \Rightarrow \mathrm{VaR}_a(Y_t) = \mu_Y + z_a \sigma_Y$$

Το VaR για το συνδυασμό των δύο χαρτοφυλακίων ισούται με:

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_a(X_t + Y_t) &= (\mu_X + \mu_Y) + z_a \sigma_{X+Y} \\ &= (\mu_X + \mu_Y) + z_a \sqrt{(\sigma_X^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2)}\end{aligned}$$

όπου το ρ δηλώνει το συντελεστής συσχέτισης μεταξύ X_t και Y_t και $\rho \in [-1,1]$.

Η παραπάνω εξίσωση μεγιστοποιείται για ρ=1 και επομένως έχω:

$$\begin{aligned}
\text{VaR}_a(X_t + Y_t) &\le (\mu_X + \mu_Y) + z_a\sqrt{(\sigma_X + \sigma_Y)^2} \\
&= (\mu_X + \mu_Y) + z_a|\sigma_X + \sigma_Y| \qquad , \sigma_X, \sigma_Y \ge 0 \\
&= (\mu_X + \mu_Y) + z_a(\sigma_X + \sigma_Y) \\
&= (\mu_X + z_a\sigma_X) + (\mu_Y + z_a\sigma_Y) \\
&= \text{VaR}_a(X_t) + \text{VaR}_a(Y_t). \qquad \text{ο.ε.δ.}
\end{aligned}$$

2.7 Πλεονεκτήματα-Μειονεκτήματα του VaR

2.7.1 Πλεονεκτήματα

Στη διαχείριση χρηματοοικονομικού κινδύνου το VaR αποτελεί ένα καθοριστικό βήμα προς τα εμπρός σε σχέση με τα παραδοσιακά μέτρα κινδύνου τα οποία κυρίως βασίζονταν στις ευαισθησίες των μεταβλητών της αγοράς (τα ονομαζόμενα ‘Greeks’). Η δύναμη του VaR βασίζεται στα εξής:

- Το VaR είναι ένα ελκυστικό μέτρο κινδύνου γιατί είναι εύκολο για κάποιον να το κατανοήσει. Στην ουσία αυτό στο οποίο απαντάει είναι στην εξής ερώτηση: ‘‘ Πόσο άσχημη μπορεί να είναι η τελική έκβαση των πραγμάτων; (Worst Case Scenarios). Αυτή είναι μια ερώτηση που όλα τα διευθυντικά στελέχη θα ήθελαν να έχουν απαντημένη ανά πάσα στιγμή.

- Το VaR εμπεριέχει μια εκτίμηση μελλοντικών γεγονότων και μας επιτρέπει να μετατρέπουμε σε έναν μόνο αριθμό τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου.

- Επίσης λαμβάνει υπόψην τη μεταβλητότητα (volatility). Σε περιόδους όπου η μεταβλητότητα των αγορών αυξάνεται, παράλληλα αυξάνεται και ο κίνδυνος που διατρέχει ένα χαρτοφυλάκιο.

- Το κυριότερο πλεονέκτημα του VaR σύμφωνα με τον Best είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλα τα εμπορεύσιμα προϊόντα, είναι δηλαδή εφαρμόσιμο σε κάθε ρευστοποιήσιμο χαρτοφυλάκιο – αυτό είναι κάθε χαρτοφυλάκιο το οποίο μπορεί να παρατηρηθεί στην αγορά (marked to market) σε μια λογική βάση. Αντίθετα το VaR δεν είναι εφαρμόσιμο σε μη-ρευστοποιήσιμα περιουσιακά στοιχεία όπως η ακίνητη περιουσία ή η τέχνη.

- Μετράει τον κίνδυνο της κάτω πλευράς (σε σύγκριση με τη διακύμανση η οποία επηρεάζεται από υψηλές αποδόσεις).
- Με τη χρήση του VaR είναι δυνατή η σύγκριση θέσεων σε διαφορετικές αγορές ή διαφορετικά προϊόντα. Επίσης μπορούν να συγκριθούν άμεσα μέχρι και διαφορετικοί τομείς επενδύσεων μιας επιχείρησης. Κάτι παρόμοιο δεν επιτυγχάνεται με τα παραδοσιακά μέτρα κινδύνου.

- Εφαρμόσιμο σε μη-γραμμικά εργαλεία όπως είναι δικαιώματα προαίρεσης (options), με μη-συμμετρικές (μη-κανονικές) κατανομές ζημιών.

- Πλέον το VaR είναι de facto το ελάχιστα απαιτούμενο μέτρο ανάλυσης κινδύνου το σε όλες τις ρυθμιστικές αρχές των ανεπτυγμένων χωρών. Οι ρυθμιστικές αρχές επιτρέπουν τη χρήση του VaR από τις τράπεζες για να ρυθμίσουν το απαιτούμενο κεφάλαιο που μάλιστα με αυτή τη μέθοδο υπολογισμού είναι συνήθως χαμηλότερο σε σχέση με τις πιο παραδοσιακές μεθόδους αφήνοντας χώρο στην τράπεζα να μοχλεύσει το κεφάλαιό της πιο αποδοτικά.

2.7.2 Μειονεκτήματα

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζει κάποιος όταν υπολογίζει το VaR σε χρηματοοικονομικά χαρτοφυλάκια έχουν να κάνουν με τα εξής:

1. Θα πρέπει να συμπεριλαμβάνουμε στην ανάλυσή μας όλες τις επικίνδυνες μεταβλητές που επηρεάζουν το χαρτοφυλάκιο.
2. Θα πρέπει να εκτιμούμε σωστά τις πιθανότητες που έχουν να κάνουν με τα μελλοντικά γεγονότα της αγοράς.

Για τους παραπάνω λόγους έχουμε και τα ακόλουθα μειονεκτήματα:

- Ενώ η μέθοδος VaR μπορεί να προβλέψει την ανώτατη ζημία, δεν μπορεί ωστόσο να την προσδιορίσει με ποσοτική ακρίβεια ιδιαίτερα στην περίπτωση των ακραίων αλλαγών των τιμών. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται το stress-testing που είναι μία μέθοδος που ταυτοποιεί και ποσοτικοποιεί την επίδραση των ακραίων αλλαγών των τιμών.

- Το VaR έρχεται πάντα αργοπορημένο όταν η ζημιά έχει ήδη γίνει. Για να γίνει αυτό κατανοητό δίνουμε ένα παράδειγμα: είναι ξεκάθαρο ότι μία μέρα πριν από κάποια αναταραχή στην αγορά οι εκτιμητές των παραμέτρων δεν είναι δυνατό να προβλέψουμε ένα ξαφνικό 'πήδημα' στη μεταβλητότητα και έτσι αναπόφευκτα το VaR θα υποεκτιμήσει τον κίνδυνο και θα παρατηρήσει την αύξηση κινδύνου κάποιες μέρες αργότερα όταν η ζημιά θα έχει ήδη γίνει. Αυτό μπορεί να αποφευχθεί με σωστά εισαγωγικά δεδομένα για τη μεταβλητότητα που θα μπορούν να προβλέπουν χρονικά μελλοντικές απότομες κινήσεις στη μεταβλητότητα.

- Το VaR αναφέρεται σε αγορές που συμπεριφέρονται «κανονικά» και δεν είναι επαρκές για τις συχνά ακραίες περιπτώσεις που παρατηρούνται στις σύγχρονες χρηματοοικονομικές αγορές. Το VaR δεν έχει σχεδιαστεί για να αντιμετωπίζει αυτές τις ακραίες αλλαγές τιμών.

- Επίσης υπάρχει περίπτωση η μεθοδολογία VaR να προσφέρει υποεκτιμημένα αποτελέσματα εάν η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου μεταβληθεί κατά μη προβλέψιμο τρόπο λόγω ενός αναπάντεχου «σοκ» στην οικονομία μιας χώρας.

- Μπορεί να παρέχει ανεπαρκή εικόνα των κινδύνων (για παράδειγμα να αποκλείει ή να διπλασιάζει μεγάλες ζημιές).

- Από τη στιγμή που το VaR δε λαμβάνει υπόψην του κινδύνους οι οποίοι υπερβαίνουν τοVaR, μπορεί να οδηγήσει σε ασύμβατα αποτελέσματα για διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης, για παράδειγμα:

σε 95% επίπεδο εμπιστοσύνης, οι ξένες μετοχές μπορεί να έχουν κύριους συντελεστές κινδύνου ενώ σε 99% επίπεδο εμπιστοσύνης, οι εγχώριες μετοχές να έχουν κύριους συντελεστές κινδύνου για τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου.

- Παρέχει μια ακριβή στατιστική εκτίμηση της μέγιστης πιθανής απώλειας ενός χαρτοφυλακίου όταν οι αγορές συμπεριφέρονται φυσιολογικά. Όμως, σε αρκετά συχνή βάση οι χρηματοοικονομικές αγορές δε συμπεριφέρονται «κανονικά», αλλά παρουσιάζουν και απροσδόκητες αλλαγές τιμών.

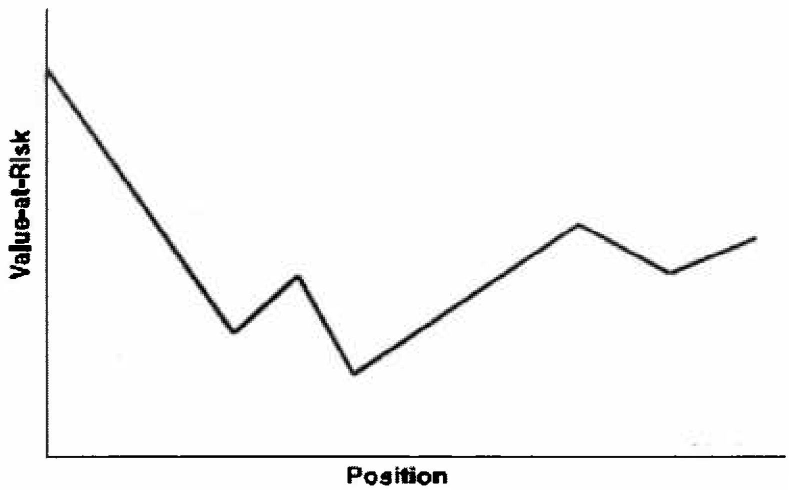
- Δεν είναι υποπροσθετικό ούτε κυρτό εκτός από την περίπτωση που έχουμε Κανονική κατανομή και σε μερικές άλλες περιπτώσεις. Στον κόσμο της δεσμευμένης κανονικότητας τα πάντα είναι αναλογικά με την τυπική απόκλιση η οποία με την σειρά της είναι υποπροσθετική. Επομένως, τα πάντα είναι υποπροσθετικά και δεν υπάρχει κάτι ιδιαίτερο για το VaR (με την υπόθεση πάντα της κανονικής κατανομής). Η μη-υποπροσθετικότητα συνεπάγεται ότι η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου μπορεί να αυξήσει τον κίνδυνο.

- Συχνά αποτυγχάνει να μετρήσει τους χρηματοοικονομικούς και λειτουργικούς κινδύνους λόγω της έλλειψης της υποπροσθετικότητας και σταθερότητας.

- Μη-συνεπές μέτρο κινδύνου σύμφωνα με τους Artzner, Delbaen, Eber και Heath.

- Κατά τους Grootveld και Hallerbach το VaR δεν παρέχει πληροφορίες για την κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου κάτω από το επίπεδο εμπιστοσύνης που ορίζουμε. Επομένως είναι πρακτικά απίθανο ένας επενδυτής να είναι αδιάφορος μεταξύ δύο χαρτοφυλακίων που έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση και το ίδιο VaR όταν η κατανομή των αποδόσεων του ενός χαρτοφυλακίου έχει κοντύτερη αριστερή ουρά(δηλαδή σχετικά μικρότερες πιθανότητες μεγαλύτερων απωλειών από το VaR) και το άλλο μακρύτερη αριστερή ουρά (δηλαδή σχετικά μεγάλες πιθανότητες μεγάλων απωλειών). Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με το μέτρο CVaR.

- Δύσκολο στον έλεγχο/βελτιστοποίηση για μη-κανονικές κατανομές. Αυτό μας δυσκολεύει όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο που μας ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο για δεδομένη απόδοση. Το VaR έχει πολλά ακρότατα.



Σχήμα 3: Η αξία σε κίνδυνο μιας θέσης.

- μείωση του VaR μπορεί να οδηγήσει σε άπλωμα της ουράς που υπερβαίνει το VaR.

Διαχείριση κινδύνου με το VaR μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση των ζημιών που υπερβαίνουν το VaR, για παράδειγμα αριθμητικά πειράματα[1] έχουν δείξει ότι για τον πιστωτικό κίνδυνο χαρτοφυλακίου βελτιστοποίηση του VaR οδηγεί σε 16% αύξηση των μέσων ζημιών που υπερβαίνουν το VaR. Μπορούμε επίσης να δούμε παρόμοια αριθμητικά πειράματα που έχουν διεξαχθεί από την IMES[2].

Το CVaR, το οποίο σε αυτή την περίπτωση είναι η υπό όρους μέση αξία της ουράς, αυξάνεται όταν το VaR ελαχιστοποιείται

<u>Παρατήρηση 4:</u>

Όπως και για κάθε εξάλλου στατιστική εκτίμηση, για να εμπιστευτεί κάποιος ένα μέτρο κινδύνου θα πρέπει να όλες οι προσεγγίσεις και οι υποθέσεις να οι οποίες γίνονται για την εκτίμηση να είναι υπό έλεγχο έτσι ώστε ο τελικός χρήστης του μέτρου να είναι ενήμερος για αυτές και επομένως να ξέρει αν μπορεί να βασιστεί στα αποτελέσματα. Όπως κάθε πολύπλοκο εργαλείο ανάλυσης, έτσι και το VaR μπορεί να μας εξασφαλίσει πολύτιμη πληροφόρηση όταν χρησιμοποιείται σωστά ενώ μπορεί να γίνει πολύ επικίνδυνο στα λάθος χέρια.

. Larsen, N., Mausser H., and S. Uryasev. Algorithms for Optimization of Value-at-Risk. P.Pardalos and V.K. Tsitsiringos, (Eds.) Financila Engineering, e-commerce and Supply Chain, Kluwer Academic Publishers, 2002, 129-157.
(download: www.ise.ulf.edu/uryasev/VaR-minimization.pdf).

[2] . Yamai, Y. and T. Yoshiba. On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall. Institute for Monetary and Economic Studies. Bank of Japan. IMES Discussion Paper 2001-E-4, 2001.
(download: www.imes.boj.or.jp/english/publication/edps/fedps2001_index.ftml

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: CONDITIONAL VALUE AT RISK-CVAR

3.1 Εισαγωγή

Το CVaR αποτελεί ένα εναλλακτικό μέτρο κινδύνου το οποίο χρησιμοποιείται στη θεωρία ακραίων καταστάσεων (Extreme Value Theory) και δίνει λύση στις περιπτώσεις που το VaR δεν είναι ικανό να διακρίνει μεταξύ χαρτοφυλακίων τα οποία φέρουν διαφορετικά επίπεδα κινδύνου.

Αν δεχτούμε ότι είναι χρήσιμο να έχουμε έναν μόνο αριθμό προκειμένου να περιγράψουμε τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου, τότε μια πολύ ενδιαφέρουσα ερώτηση θα ήταν αν το VaR είναι το καλύτερο εναλλακτικό. Πράγματι, μπορεί να δειχτεί ότι το CVaR έχει καλύτερες ιδιότητες από το VaR.

Το CVaR προέρχεται παίρνοντας ένα σταθμισμένο μέσο όρο μεταξύ του VaR και των ζημιών που εκτείνονται πέρα από το VaR. Είναι επίσης γνωστό και ως 'Mean Excess Loss', 'Mean Shortfall'και 'Tail VaR' και δημιουργήθηκε ως μια προέκταση τουVaR.

Το πρόβλημα με το να βασιστεί κάποιος μόνο στο VaR μοντέλο είναι ότι ο κίνδυνος ο οποίος αποτιμάται περιορίζεται από τη στιγμή που το τέλος της ουράς της κατανομής των ζημιών τυπικά δεν αποτιμάται. Επομένως αν οι ζημιές προκληθούν, το ποσό των ζημιών θα είναι σημαντικό σε αξία.

Ενώ το VaR κάνει την ερώτηση: " Πόσο άσχημη μπορεί να είναι η τελική έκβαση των πραγμάτων;", το C-VaR κάνει την ερώτηση: "Αν τα πράγματα τελικά πάνε άσχημα, πόσα πολλά αναμένουμε ότι μπορεί να χάσουμε;"

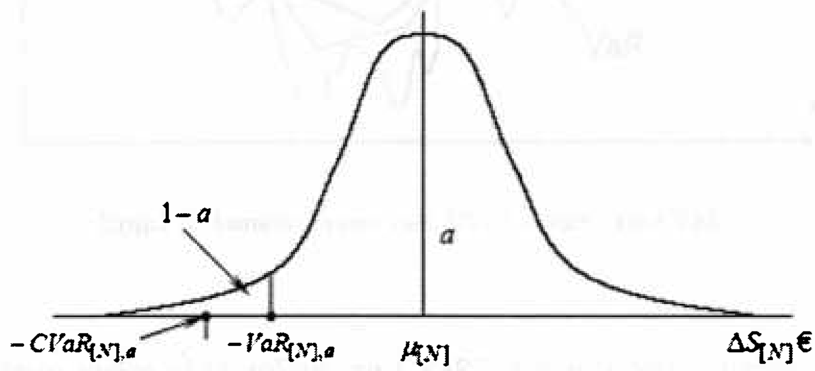
3.2 Ορισμός του CVaR

Το C-VaR είναι η αναμενόμενη ζημιά κατά τη διάρκεια της περιόδου των Ν-ημερών δεδομένου ότι είμαστε κατά (100-α)% στην αριστερή ουρά της κατανομής. Για παράδειγμα, με α = 99 και N = 10, το C-VaR είναι ο μέσος όρος του ποσού που χάνουμε για μία περίοδο 10 ημερών με την υπόθεση ότι η χειρότερη περίπτωση που είχε 1% πιθανότητα να συμβεί, τελικά συνέβη.

<u>Ορισμός 1:</u> **<u>(CVaR):</u>** Το N-ημερών CVaR ενός περιουσιακού στοιχείου σε 100α% επίπεδο εμπιστοσύνης δίνεται από τη σχέση:

$$CVaR_{[N],a} = -E[\Delta S_{[N]} / \Delta S_{[N]} \leq -VaR_{[N],a}]$$

όπου $\Delta S_{[N]}$: η N-ημερών μεταβολή στην αξία του περιουσιακού στοιχείου.



Σχήμα 1: Η κατανομή των N-ημερών της μεταβολής μιας μετοχής και το VaR και CVaR των N-ημερών σε 100α% επίπεδο εμπιστοσύνης.

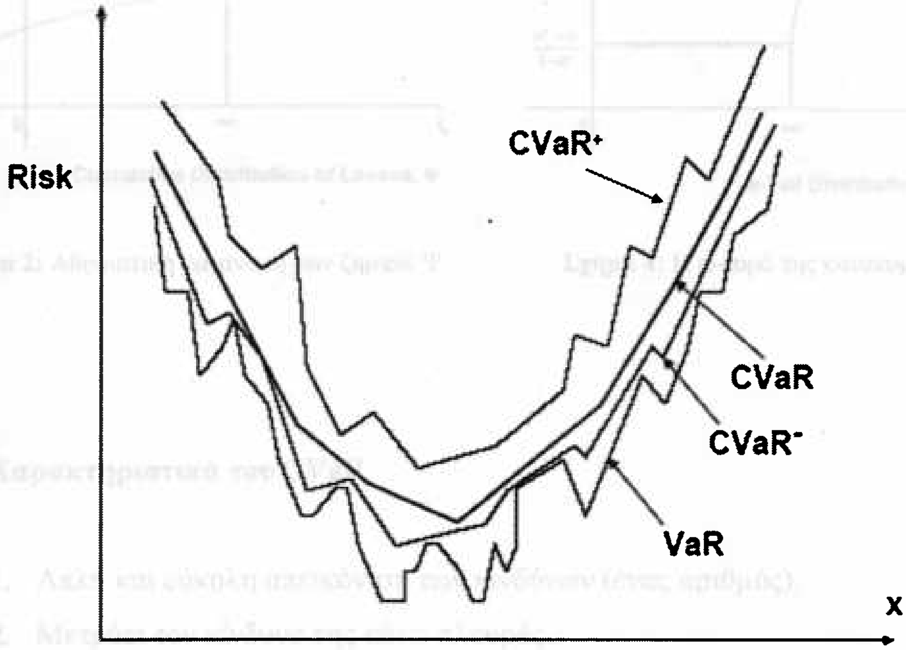
Σχετικά με το CVaR ορίζουμε τα εξής:

CVaR^{+} (το ανώτερο CVaR - 'upper CVaR') = οι αναμενόμενες ζημιές που αυστηρά υπερβαίνουν το VaR (ονομάζεται επίσης Mean Excess Loss ή Expected Shortfall).

CVaR^{-} (το κατώτερο CVaR - ' lower CVaR') = οι αναμενόμενες ζημιές που υπερβαίνουν ασθενώς το VaR, δηλαδή οι αναμενόμενες ζημιές που είναι ίσες ή υπερβαίνουν το VaR. (ονομάζεται επίσης Tail VaR)

Το CVaR είναι ένας σταθμικός μέσος του VaR και του CVaR^{+} :

$$CVaR = \lambda \, VaR + (1-\lambda) \, CVaR^{+}, \; 0 \leq \lambda \leq 1.$$



Σχήμα 2: Απεικόνιση των VaR, CVaR, $CVaR^{-}$ και $CVaR^{+}$.

Το CVaR είναι κυρτό αλλά τοVaR, το $CVaR^{-}$ και το $CVaR^{+}$ μπορεί να μην είναι κυρτά. Οι ανισότητες που ισχύουν είναι οι εξής:

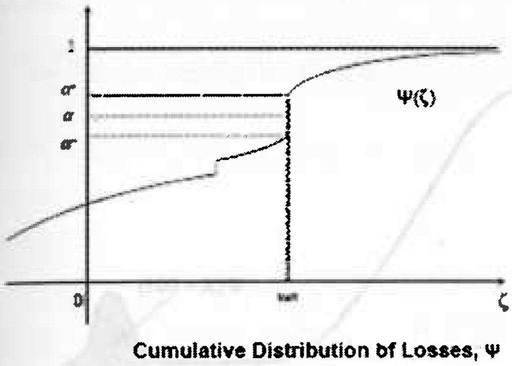
$$VaR \leq CVaR^{-} \leq CVaR \leq CVaR^{+}$$

<u>Ορισμός 2: (Τυπικός ορισμός του CVaR)</u>: Το CVaR είναι ο μέσος της α-ουράς της κατανομής Ψ_{a}.

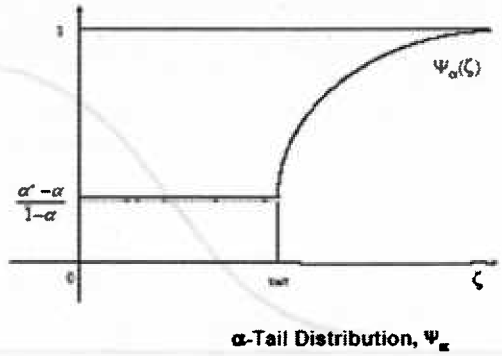
Όπου:

Ψ = η αθροιστική κατανομή των ζημιών,
Ψ_{a} = η κατανομή της α-ουράς, η οποία ισούται με μηδέν για ζημιές κάτω από το VaR και με $\frac{\Psi - \alpha}{1-\alpha}$ για ζημιές που ισούνται ή υπερβαίνουν το VaR.

Σχηματικά έχουμε:



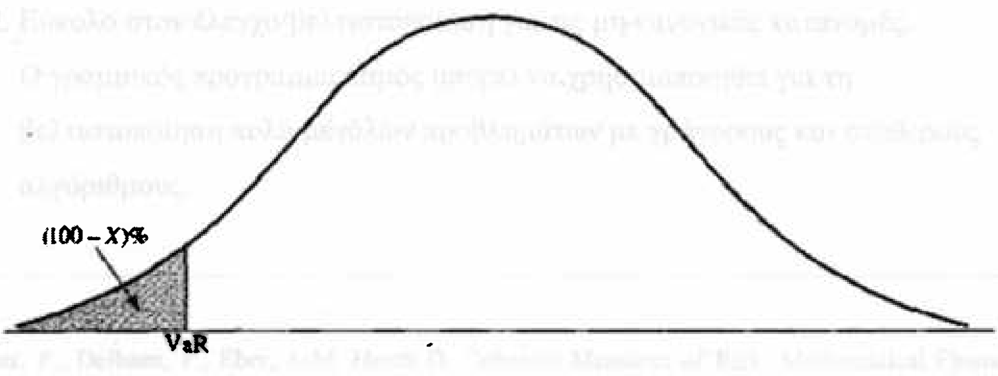
Σχήμα 2: Αθροιστική κατανομή των ζημιών Ψ.



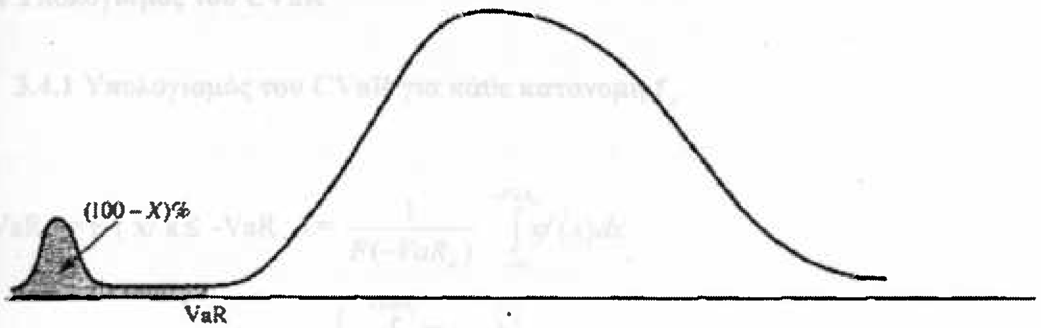
Σχήμα 4: Η α-ουρά της κατανομής Ψ_{a} .

3.3 Χαρακτηριστικά του CVaR

1. Απλή και εύκολη απεικόνιση των κινδύνων (ένας αριθμός).
2. Μετράει τον κίνδυνο της κάτω πλευράς.
3. Εφαρμόσιμο σε μη-συμμετρικές κατανομές ζημιών.
4. Ερμηνεύει κινδύνους που είναι κάτω από το VaR (πιο συντηρητικό από το VaR).
5. Είναι ενήμερο για το σχήμα της δεσμευμένης κατανομής του ποσοστού των χειρότερων περιπτώσεων ενώ το VaR δεν είναι. Επομένως δε μπορεί να ξεγελαστεί μεταφέροντας κάποια μάζα της $\Delta S_{[N]}$ κατανομής στο $-\infty$.



Σχήμα 5: Υπολογισμός του VaR της κατανομής $\Delta S_{[N]}$.



Σχήμα 6: Μια εναλλακτική περίπτωση της κατάστασης του γραφήματος 4. Το VaR είναι το ίδιο αλλά η δυνητική ζημιά είναι μεγαλύτερη.

6. Είναι κυρτό με ό,τι αφορά τις θέσεις του χαρτοφυλακίου.
7. Σε αντίθεση με το VaR το μέτρο αυτό είναι κατά γενικότητα υποπροσθετικό και γι'αυτό είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου. Αποτελεί ένα εξαιρετικό υποψήφιο για την αντικατάσταση του VaR όταν επιδιώκουμε να διαχειριστούμε τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο.
8. Συνεπές μέτρο κινδύνου σύμφωνα με τους Artzner, Delbaen, Eber και Heath[1].
9. Με σταθερές στατιστικές εκτιμήσεις.
10. Είναι συνεχές για το επίπεδο εμπιστοσύνης α και συνεπές για διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης σε αντίθεση με το VaR (τα VaR, $CVaR^-$ και $CVaR^+$ μπορεί να είναι μη-συνεχή στο α).
11. Συνέπεια με την προσέγγιση της μέσης διακύμανσης (mean-variance approach): για κανονικές κατανομές ζημιών, η ευνοϊκότερη διακύμανση και τα CVaR χαρτοφυλάκια συμπίπτουν).
12. Εύκολο στον έλεγχο/βελτιστοποίηση για τις μη-κανονικές κατανομές. Ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη βελτιστοποίηση πολύ μεγάλων προβλημάτων με γρήγορους και σταθερούς αλγόριθμους.

[1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. Heath D. Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance, 9 (1999), 203-228.

3.4 Υπολογισμός του CVaR

3.4.1 Υπολογισμός του CVaR για κάθε κατανομή f_x

$$\mathrm{CVaR}_a = E(x/\, x \leq -\mathrm{VaR}_a) = \frac{1}{F(-VaR_a)} \int_{-\infty}^{-VaR_a} xf(x)dx$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{-VaR_a} xF'(x)dx$$

$$= \frac{1}{a} \{[xF(x)]_{-\infty}^{-VaR_a} - \int_{-\infty}^{-VaR_a} F(x)dx\}$$ ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$= \frac{1}{a} \{-\mathrm{VaR}_a F(-\mathrm{VaR}_a) - \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{-VaR_a} F(x)dx\}$$

$$= \frac{1}{a}\, \alpha(-\mathrm{VaR}_a) - \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{-VaR_a} F(x)dx$$

$$= -\mathrm{VaR}_a - \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{-VaR_a} F(x)dx$$

3.4.2 Υπολογισμός του CVaR με την υπόθεση της κανονικής κατανομής

$$\mathrm{CVaR}_a = E(x/\, x \leq -\mathrm{VaR}_a) = \frac{1}{F(-VaR_a)} \int_{-\infty}^{-VaR_a} xf(x)dx$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{-VaR_a} xf(x)dx$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\frac{-VaR_a-\mu}{\sigma}} z\phi(z)dz\sigma$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\frac{-VaR_a-\mu}{\sigma}} z\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sigma e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-VaR_a-\mu}{\sigma}} ze^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [- e^{-\frac{1}{2}z^2} dz]_{-\infty}^{\frac{-VaR-\mu}{\sigma}}$$

$$= \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{- e^{-\frac{1}{2}(\frac{-VaR-\mu}{\sigma})^2}\}$$

$$= - \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{-VaR-\mu}{\sigma})^2}$$

Σημείωσεις:

1) $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow X = \sigma Z + \mu$

$dX = \sigma \, dZ$

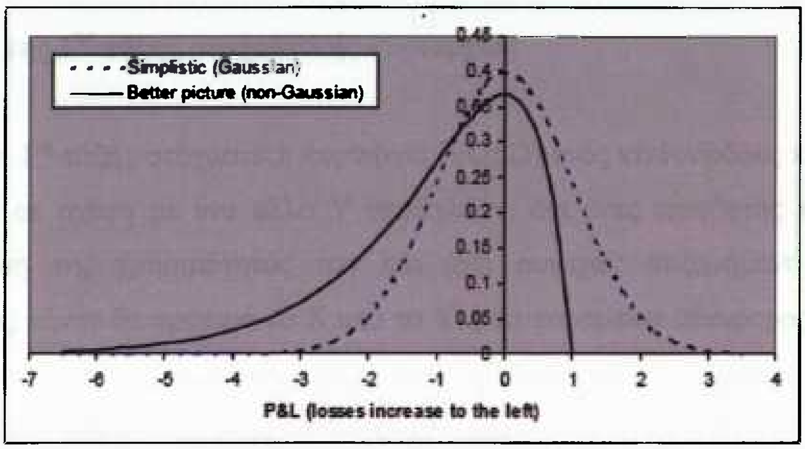
2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)$

3) $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2)$

3.5 Συμβολή VaR, CVaR και τυπικής απόκλισης

Η συμβολή των VaR, CVaR, και της τυπικής απόκλισης είναι τελείως διαφορετική. Το VaR και το CVaR δίνουν έμφαση σε σε αυστηρούς και σπάνιους κινδύνους (κινδύνους ουράς) ενώ η τυπική απόκλιση δίνει έμφαση σε μικρούς, συχνούς κινδύνους (κινδύνους στη μέση της κατανομής – middle-of-distribution risks).

Όταν βλέπουμε τις κατανομές των αποδόσεων σύνθετων χρηματοοικονομικών εργαλείων όπως τα παράγωγα, εμφανίζονται μερικά μειονεκτήματα. Ας πάρουμε για παράδειγμα το σχήμα 1 το οποίο μας παρουσιάζει δύο προσπάθειες για μοντελοποίηση της κατανομής των κερδών και των ζημιών (profits and loss distribution-P&L distribution) ενός χαρτοφυλακίου το οποίο διατηρεί ένα ή περισσότερα ομόλογα πιστωτικού κινδύνου(μόνο 'long' θέσεις).



Σχήμα 7: Διαδικασίες προσέγγισης της στατιστικής κατανομής των αποδόσεων ενός ομολόγου με πιστωτικό κίνδυνο (ή ενός χαρτοφυλακίου). Διακεκομμένη γραμμή: Κανονική κατανομή N(0,1), συνεχής γραμμή: Γάμμα κατανομή Gamma(2,1) που μετακινείται για να κάνει το μέσο της μηδέν.

Το θέμα με το παραπάνω σχεδιάγραμμα είναι ότι και οι δύο κατανομές έχουν μέσο 0 και διακύμανση 1 επομένως η θεωρία mean-variance δεν τις διαχωρίζει.

Δεν υπάρχει κάτι ουσιαστικά λάθος με το να χρησιμοποιήσει κάποιος την τυπική απόκλιση όταν οι κατανομές είναι λοξές ή με παχιές ουρές. Εάν κάποιος ανησυχεί κυρίως για συνηθισμένα, όχι πολύ σοβαρά γεγονότα και όχι σχετικά με τις ουρές, τότε η τυπική απόκλιση μπορεί να είναι κατάλληλη. Μόνο που αυτό που κατά κύριο λόγο ενδιαφέρει τόσο τις ρυθμιστικές αρχές όσο και τους διαχειριστές κινδύνου είναι ο κίνδυνος της κάτω πλευράς.

3.6 Σύγκριση VaR και CVaR μέσω στοχαστικής κυριαρχίας

Η έννοια της στοχαστικής κυριαρχίας χρησιμοποιείται για να συγκρίνονται επιλογές υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Στην κλασσική θεωρία χρησιμότητας, η έννοια συνδέεται με τη σκέψη της μεγιστοποίησης συνεχών, μη-φθινουσών και κοίλων συναρτήσεων χρησιμότητας που περιγράφουν ορθολογικούς επενδυτές που δεν επιθυμούν τον κίνδυνο (risk averse).

3.6.1 Μέσω της 1ης τάξης στοχαστικής κυριαρχίας

Πιο ειδικά, η 1ης τάξης στοχαστική κυριαρχία (FOSD) ενός κινδυνώδους περιουσιακού στοιχείου X σε σχέση με ένα άλλο Y υποδηλώνει ότι ένας επενδυτής που επιθυμεί μεγιστοποίηση της χρησιμότητάς του και έχει συνεχώς αυξανόμενη συνάρτηση χρησιμότητας πάντα θα προτιμά το X από το Y ή θα παραμένει αδιάφορος μεταξύ των δύο.

Οι Kaplanski και Kroll (2000) έδειξαν ότι το VaR διατηρεί μια συνεπή προτίμηση ordering of assets υπό τον FOSD κανόνα. Αντίθετα επιλογές οι οποίες βασίζονται στο CVaR δεν είναι συνεπείς με το πλαίσιο της θεωρίας της χρησιμότητας από τη στιγμή που το CVaR δε δείχνει καθαρή προτίμηση ordering υπό τον FOSD κανόνα.

Ανεξάρτητα από την κατανομή των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων, η προτίμηση ordering από όλα τα downside μέτρα κινδύνου εκτός του CVaR είναι συνεπή υπό τον FOSD κανόνα. Γι'αυτό και όλα τα downside μέτρα κινδύνου εκτός του CVaR εξασφαλίζουνε αποτελεσματική επιλογή επικίνδυνων δικαιωμάτων προαίρεσης (options) ενώ το CVaR δε μπορεί να διευθετήσει τα options.

Το CVaR μπορεί να μην είναι ένα κατάλληλο μέτρο κινδύνου για όταν έχεις να διαλέξεις μεταξύ δύο επικίνδυνων options ενώ άλλα downside μέτρα κινδύνου, συμπεριλαμβανομένου και του VaR, παρέχουν κατάλληλη επιλογή επένδυσης η οποία είναι συνεπής με το πλαίσιο της κλασσικής θεωρίας της χρησιμότητας.

3.6.2 Μέσω της 2ης τάξης στοχαστικής κυριαρχίας

Παρομοίως αν το X κυριαρχεί του Y με την έννοια της στοχαστικής κυριαρχίας 2ης τάξης (SOSD), τότε όλοι οι επενδυτές που δεν επιθυμούν τον κίνδυνο και έχουν κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας θα προτιμήσουν το X από το Y.

Ανάλογα με την FOSD, το VaR είναι συνεπές με την preference ordering υπό τον SOSD κανόνα. Αυτό συνεπάγεται ότι στις περιοχές των ουρών των περιουσιακών στοιχείων, η βασισμένη στο VaR επιλογή επένδυσης, είναι συνεπής με την επιλογή επένδυσης που είναι βασισμένη στη θεωρία χρησιμότητας ενός risk averse επενδυτή υπό το SOSD κριτήριο.

Αυτό είναι ενδιαφέρον γιατί είναι η περιοχή της ουράς η οποία είναι πιο κατάλληλη από την οπτική της διαχείρισης κινδύνου. Στην περίπτωση εκείνη στην οποία τα περιουσιακά στοιχεία κατανέμονται κανονικά, το βασισμένο στο VaR ordering είναι έγκυρο για πολύ μεγαλύτερη περιοχή της κατανομής.

Όπως και στην περίπτωση της 1ης τάξης στοχαστικής κυριαρχίας, ομοίως και υπό τον SOSD κανόνα το CVaR δε δείχνει ξεκάθαρη προτίμηση ordering. Συνεπώς το VaR είναι συνεπές με το πλαίσιο της μεγιστοποίησης της χρησιμότητας ενώ το CVaR δεν είναι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Η ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΤΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΑΣ

4.1 Σύνθεση και νομική φύση της επιτροπής της Βασιλείας

Η Επιτροπή της Βασιλείας συστάθηκε το 1974 από τους διοικητές των κεντρικών τραπεζών των κρατών-μελών της «Ομάδας των 10» γνωστής με το ακρωνύμιο «G-10». Μέλη της είναι οι κεντρικές τράπεζες και οι λοιπές τραπεζικές εποπτικές αρχές από τα κράτη μέλη του G-10, την Ελβετία, το Λουξεμβούργο και την Ισπανία.

Η Επιτροπή της Βασιλείας δεν είναι διεθνής διακυβερνητικός οργανισμός αλλά μια de facto οργάνωση χωρίς νομική προσωπικότητα που λειτουργεί στο πλαίσιο της τράπεζας διεθνών Διακανονισμών. Δεν είναι εποπτική αρχή καθώς δεν έχει αρμοδιότητα να ασκεί προληπτική εποπτεία στις τράπεζες.

4.2 Το έργο της Επιτροπής της Βασιλείας

Βασικός άξονας δραστηριότητάς της είναι η διασφάλιση της σταθερότητας του διεθνούς τραπεζικού συστήματος. Η ανησυχία των νομισματικών και εποπτικών αρχών-μελών της Επιτροπής της Βασιλείας αναφορικά με τη φερεγγυότητα των τραπεζών που λειτουργούσαν στην επικράτεια άσκησης της δικαιοδοσίας τους σε ένα περιβάλλον έντονης αστάθειας βασικών μακροοικονομικών μεγεθών, σε συνδυασμό μάλιστα και με τη ραγδαία διεθνοποίηση της τραπεζικής δραστηριότητας, ανέδειξαν ως απαραίτητα την προσφυγή στη διεθνή συνεργασία ώστε:

- αφ’ενός μεν να κατανοηθεί το νέο περιβάλλον λειτουργίας του διεθνούς τραπεζικού συστήματος, και
- αφ’ετέρου να προωθηθεί η υιοθέτηση από τις εθνικές ρυθμιστικές αρχές εποπτικών κανόνων και των προτύπων που να είναι κατάλληλα για την πρόληψη γενικευμένων κρίσεων και τη διασφάλιση της συστηματικής σταθερότητας.

4.3 Μέθοδοι προληπτικής εποπτείας και ελέγχου τραπεζών

4.3.1 Κεφαλαιακή επάρκεια

Το βασικότερο αντικείμενο δραστηριότητας της Επιτροπής της Βασιλείας από το 1987 υπήρξε – και συνεχίζει αναμφίβολα να είναι – ο διεθνής συντονισμός των εθνικών διατάξεων που διέπουν μια ιδιαίτερα σημαντική πτυχή της προληπτικής τραπεζικής εποπτείας: την εποπτεία της κεφαλαιακής επάρκειας των τραπεζών.

4.3.2 Διαχείριση κινδύνων

Μια άλλη θεματική ενότητα η οποία απασχολεί ιδιαίτερα την Επιτροπή είναι εκείνη που άπτεται του ζητήματος της διαχείρισης των κινδύνων στους οποίους εκτίθενται οι τράπεζες στο πλαίσιο της δραστηριότητάς τους. Γίνεται μέτρηση και διαχείριση:

- του πιστωτικού κινδύνου,
- του κινδύνου χώρας,
- του κινδύνου από μεγάλα χρηματοδοτικά ανοίγματα,
- του κινδύνου που απορρέει από τις σχέσεις τραπεζών με επιχειρήσεις υψηλού βαθμού μόχλευσης (π.χ hedge funds),
- του κινδύνου εισοδήματος επιτοκίων,
- του κινδύνου διακανονισμού από συναλλαγές σε συνάλλαγμα,
- των κινδύνων που απορρέουν από συναλλαγές εκτός ισολογισμού και ειδικότερα από συναλλαγές σε εξω-χρηματιστηριακά παράγωγα μέσα,
- του κινδύνου ρευστότητας,
- του λειτουργικού κινδύνου και ειδικότερα του λειτουργικού κινδύνου από συστήματα πληροφορικής και τηλεπικοινωνίες, και
- των κινδύνων από την ηλεκτρονική τραπεζική και τις συναλλαγές με ηλεκτρονικό χρήμα.

4.3.3 Εσωτερικός και εξωτερικός έλεγχος τραπεζών

Με βάση την εμπειρία που αντλήθηκε από τις εποπτικές αρχές από την υπόθεση της πτώχευσης της βρετανικής διεθνούς τράπεζας Barings Bank, η Επιτροπή της Βασιλείας έχει επιληφθεί και του ζητήματος που αφορά στην επάρκεια του εσωτερικού και εξωτερικού ελέγχου των τραπεζών.

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται επιγραμματικά τα κείμενα της Επιτροπής της Βασιλείας για τα αντίστοιχα εποπτικά μέτρα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Εποπτεία της κεφαλαιακής επάρκειας των διεθνών τραπεζών:

Το έργο της Επιτροπής της Βασιλείας

ΕΠΟΠΤΙΚΟ ΜΕΤΡΟ	ΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΑΣ
Α. Υπολογισμός κεφαλαιακών απαιτήσεων για κάλυψη έναντι του πιστωτικού κινδύνου.	
Γενικές διατάξεις.	Capital Accord (1988)
Εποπτική αναγνώριση συμφωνιών συμψηφισμού κατά τον υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων για τις συναλλαγές σε παράγωγα μέσα.	• The treatment of the credit risk associated with certain-off-balance-sheet items (1994). • The treatment of potential exposure for off-balance-sheet items (1995).
Β. Υπολογισμός κεφαλαιακών απαιτήσεων για κάλυψη έναντι των κινδύνων αγοράς.	
Τυποποιημένη μέθοδος.	Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks (1996), Part A.
Μέθοδος βασισμένη στα εσωτερικά μοντέλα μέτρησης κινδύνων.	• Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks (1996), Part B. • Modifications to the market risk amendment (1997).
Γ. Εκπλήρωση κεφαλαιακών απαιτήσεων.	
Πιστωτικός κίνδυνος.	Capital Accord (1988).
Κίνδυνοι αγοράς.	• Capital Accord (1988). • Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks (1996), Part A.

Στην έννοια των κινδύνων αγοράς που αναφέρονται στον επάνω πίνακα εμπίπτουν:

- ο κίνδυνος θέσης από ανοικτές θέσεις σε χρεωστικούς τίτλους, παράγωγα μέσα επί επιτοκίων και χρεωστικών τίτλων, μετοχές και παράγωγα μέσα επί μετοχών ή δείκτη μετοχών,
- ο συναλλαγματικός κίνδυνος ο οποίος απορρέει από τη μεταβλητότητα της συναλλαγματικής ισοτιμίας του νομίσματος στον οποίο μια τράπεζα υποχρεούται να υποβάλλει στοιχεία σε σχέση με τα αλλοδαπά νομίσματα στα οποία είναι εκφρασμένα στοιχεία εντός και εκτός ισολογισμού, και
- ο κίνδυνος από ανοικτές θέσεις σε εμπορεύματα, που απορρέει από τη μεταβολή των αγοραίων τιμών σε πολύτιμα μέταλλα και άλλα βασικά εμπορεύματα στα οποία οι τράπεζες έχουν ανοιχτές θέσεις.

Σύμφωνα με το σύμφωνο της Βασιλείας του 1988, για τον υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων των τραπεζών χρησιμοποιούνται συντελεστές κινδύνου οι οποίοι «σταθμίζουν» τον κίνδυνο των δανείων και των επενδύσεων που κάνει η τράπεζα. Με αυτό τον τρόπο υπολογίζεται το κεφάλαιο σε κίνδυνο και η κεφαλαιακή επάρκεια η οποία αποτελεί τουλάχιστον το 8% σε κίνδυνο, δηλαδή η τράπεζα πρέπει να διακρατεί τουλάχιστον το 8% σε κίνδυνο.

Η «κεφαλαιακή απαίτηση» (Market Charge [MRC]) κατά την εφαρμογή της μεθόδου των «εσωτερικών μοντέλων» (internal models approach) ορίζεται ως εξής από το κανονιστικό πλαίσιο της Επιτροπής της Βασιλείας (Basle Committee) της Τράπεζας Διεθνών Διακανονισμών (Bank of International Settlements [BIS]) :

<u>Market Risk Charge (MRC) [Internal Models Approach] :</u>

$$MRC(t) = max[VaR(t-1), (\frac{1}{60}) \times k \times \sum_{i=1}^{60} VaR(t-i)] + SRC(t)$$

Όπου:

κ = ο συντελεστής για το πόσα χρήματα πρέπει να βάλει μια τράπεζα στην άκρη για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο- (multivariate factor-πολυμεταβλητός παράγοντας)-τιμωρία, και

SRC(t) = η συγκεκριμένη χρέωση κινδύνου (specific risk charge).

Οι παραβιάσεις των εκτιμήσεων VaR των τραπεζών «τιμωρούνται» ως εξής:

Για αριθμό παραβιάσεων (σε ένα χρόνο-255ημέρες): 0-4, k=3.0
Για αριθμό παραβιάσεων (σε ένα χρόνο-255 ημέρες): 5-9, k=3.4 – 3.85
Για αριθμό παραβιάσεων (σε ένα χρόνο-255 ημέρες): 10+, k=4.0 +

Να σημειώσουμε ότι η κεντρική τράπεζα τιμωρεί μετά την τέταρτη φορά.

4.4 Έλεγχος αξιοπιστίας των υποδειγμάτων εκτίμησης του κινδύνου

Τα συστήματα εκτίμησης κινδύνου (Value at Risk) που χρησιμοποιούμε κρίνονται ότι είναι ικανοποιητικά αν η πραγματοποιούμενη ζημιά είναι πάντα μικρότερη από εκείνη που προβλέπεται. Βέβαια στη πράξη θα υπάρχουν και περιπτώσεις που η ζημιά θα υπερβαίνει την εκτιμώμενη. Το ερώτημα τότε τίθεται αν αυτός ο αριθμός «αστοχιών» είναι στατιστικά σημαντικός ή όχι.

Για παράδειγμα οι οδηγίες της επιτροπής της Βασιλείας ορίζουν ότι στη περίπτωση εκτίμησης του κινδύνου με ημερήσιο ορίζοντα και σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, το σύστημα κρίνεται ικανοποιητικό αν ο αριθμός των αστοχιών δεν υπερβεί τις τέσσερις. Αν υποθέσουμε ότι στο έτος έχουμε 250 εργάσιμες ημέρες τότε ο αριθμός των αστοχιών κατά μέσο όρο θα έπρεπε να ήταν: (100%-99%)χ250 = 2.5 αστοχίες. Δεδομένου ότι για κάθε ημέρα υπάρχουν μόνο 2 ενδεχόμενα για τη επόμενη, είτε να ευστοχήσουμε ή να αστοχήσουμε στην εκτίμηση μας. Άρα ο αριθμός των αστοχιών , *n*, ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή:

$$f(n) = \binom{T}{n} p^n (1-p)^{T-n}, \text{ όπου } p=0.01,\ T=250.$$

Με μέση τιμή $E(n)=Tp=250(0.01)$ και $\sigma^2(n)=p(1-p)T=0.01(0.99)250=2.47$.

Από τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι η σωρευτική πιθανότητα να πραγματοποιηθούν πάνω από 4 αστοχίες (δηλ., 5,6,7 κ.λ.π.) ισούται με 10.8%. Δηλαδή υπάρχει 10.8% πιθανότητα, στις οδηγίες της επιτροπής της Βασιλείας, να απορριφθεί το σύστημα αν και είναι σωστό. Δηλαδή αν και οι εκτιμήσεις μας έχουν προκύψει με πιθανότητα σφάλματος 1% και περιμένουμε κατά μέσο όρο 2.5 αστοχίες το χρόνο, παρ'όλα αυτά υπάρχει 10.8% πιθανότητα να απορρίψουμε το σύστημα εκτίμησης κινδύνων που χρησιμοποιούμε (σφάλμα τύπου I στη επαγωγική στατιστική).

Η επιτροπή της Βασιλείας σε γνώση αυτού του προβλήματος συστήνει σε περιπτώσεις που οι αστοχίες υπερβαίνουν τις 4 αλλά είναι μικρότερες των 10, να επανελέγχεται το σύστημα και να μην απορρίπτεται. Αν η υπέρβαση του ορίου των 4 αστοχιών δεν βασίζεται σε τυχαίους παράγοντες (bad luck), τότε είναι στη διακριτική ευχέρεια των εποπτικών αρχών της κάθε χώρας να «επιβάλλουν» , υπό μορφή ποινής, στο πιστωτικό ίδρυμα αυξημένο ύψος κεφαλαιακής επάρκειας.

4.5 Η χρήση των συστημάτων εκτίμησης του κινδύνου αγοράς

Η πρώτη χρήση αναφέρεται στον υπολογισμό της κεφαλαιακής επάρκειας των πιστωτικών ιδρυμάτων και των εταιριών παροχής επενδυτικών υπηρεσιών. Σύμφωνα με την "Τροποποίηση των οδηγιών περί κεφαλαιακής επάρκειας του 1997" οι υπόχρεοι πρέπει να έχουν συγκεκριμένο ύψος «ιδίων κεφαλαίων» ώστε να καλύπτουν τους κινδύνους της αγοράς (δηλαδή κινδύνους επιτοκίου, μετοχών, συναλλαγματικών ισοτιμιών και τιμών εμπορευμάτων).

Η κεφαλαιακή αυτή επάρκεια μπορεί να υπολογίζεται με 2 διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος βασίζεται σε συγκεκριμένους κανόνες υπολογισμού των προβλεπόμενων κεφαλαίων για κάθε θέση και αυτός ονομάζεται η τυποποιημένη μέθοδος υπολογισμού της κεφαλαιακής επάρκειας. Ο δεύτερος βασίζεται στη χρήση εσωτερικών υποδειγμάτων (δηλαδή τη μεθοδολογία VaR).

Βάσει αυτής της δεύτερης μεθόδου προβλέπεται ότι το πιστωτικό ίδρυμα υπολογίζει το VaR για ορίζοντα 10 ημερών και σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%. Αν το πιστωτικό ίδρυμα υπολογίζει το *VaR* με ορίζοντα τη μια ημέρα τότε η εκτίμηση μπορεί να αναχθεί σε περίοδο 10 ημερών πολλαπλασιάζοντας την ημερήσια εκτίμηση με τη τετραγωνική ρίζα του 10. Η κεφαλαιακή επάρκεια (CA=capital adequacy) τότε δεν μπορεί να είναι μικρότερη από το μέγιστο από τα παρακάτω 2 μεγέθη:

$$CA = \max\left(k(1/60)\sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i}, VaR_{t-1}\right)$$

Δηλαδή η κεφαλαιακή επάρκεια είναι το μεγαλύτερο από το μέσο όρο των εκτιμήσεων των τελευταίων 60 ημερών ,πολλαπλασιασμένο με ένα συντελεστή *κ* που ισούται τουλάχιστον με 3, ή της εκτίμησης του κινδύνου της χθεσινής ημέρας.

Πολλαπλασιάζουμε με το συντελεστή *κ=3* διότι διαφορετικά σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99% θα αποδεχόμασταν 1 αστοχία στις 100 με ορίζοντα τις 10 ημέρες. Δηλαδή αν δεχθούμε ότι το έτος έχει 250 εργάσιμες ημέρες θα δεχόμασταν μία πτώχευση τράπεζας ανά 4 χρόνια, γεγονός που θεωρείται απαράδεκτα υψηλό για τη σταθερότητα του πιστωτικού συστήματος.

Επιπλέον οι επιχειρήσεις μπορούν να χρησιμοποιούν τα συστήματα VaR για να δημοσιοποιούν στους μετόχους τους , και γενικότερα στους επενδυτές, το ύψος του αναλαμβανόμενου κινδύνου αν επενδύσουν σε αυτές. Δηλαδή ο μέτοχος πληροφορείται ότι για συγκεκριμένο ύψος κεφαλαιοποίησης της επιχείρησης ο «μέγιστος» κίνδυνος απώλειας αξίας που αναλαμβάνουν είναι αυτός που αναφέρεται στην εκτίμηση του VaR (με συγκεκριμένη πιθανότητα σφάλματος η απώλεια να υπερβεί εκείνη που έχει εκτιμηθεί).

Η δεύτερη χρήση αναφέρεται στη άσκηση παθητικής διαχείρισης του χαρτοφυλακίου ενός πιστωτικού ιδρύματος. Η βασική άποψη εδώ είναι ότι ο ρόλος των ιδίων κεφαλαίων είναι να απορροφά τις ζημιές που δημιουργούνται. Συνεπώς, σε ένα αποκεντρωμένο σύστημα λήψης αποφάσεων το ερώτημα που ανακύπτει είναι πως οι συνολικά αναλαμβανόμενοι κίνδυνοι δεν υπερβαίνουν το ύψος των ιδίων κεφαλαίων.

Η απάντηση βρίσκεται αν σε κάθε μονάδα λήψης αποφάσεων κατανεμηθεί ένα τμήμα των ιδίων κεφαλαίων το οποίο δεν πρέπει να ξεπεραστεί. Το ύψος των ιδίων κεφαλαίων τα οποία κατανέμονται σε κάθε δραστηριότητα εκφράζουν την πολιτική της διοίκησης όσον αφορά τη προτεραιότητα στην επέκταση κάποιων τομέων (π.χ. corporate banking) σε βάρος κάποιων άλλων (π.χ. λιανική τραπεζική). Επίσης πρέπει να σχολιασθεί το γεγονός ότι το συνολικό ύψος των κατανεμηθέντων κεφαλαίων υπερβαίνει τα ίδια κεφάλαια δεδομένης της διαφοροποίησης των κινδύνων που επιτυγχάνονται σε ένα χαρτοφυλάκιο.

Ο ορισμός ενός ύψους VaR που δεν πρέπει να υπερβεί η κάθε μονάδα λήψης αποφάσεων (π.χ. dealer) λειτουργεί επίσης και σαν αυτόματος μηχανισμός διόρθωσης του χαρτοφυλακίου σε περιπτώσεις αύξησης του κινδύνου. Αν δηλαδή έχουμε εισέλθει σε μία περίοδο νευρικότητας των αγορών με συνεπακόλουθη αύξηση των διακυμάνσεων τότε αυτόματα ο κάθε dealer θα πρέπει να μειώσει τη θέση του έτσι ώστε να παραμείνει ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου του (VaR) εντός των ορίων που έχουν θεσπισθεί.

Η τρίτη χρήση αποσκοπεί στη επιλογή χαρτοφυλακίου δηλαδή αναφέρεται στην ενεργητική διαχείριση του χαρτοφυλακίου. Η ενεργητική διαχείριση συνεπάγεται ότι δεν περιοριζόμαστε στην επιλογή της κατάλληλης διάρθρωσης του χαρτοφυλακίου που αντανακλά τις απόψεις μας σχετικά με το κίνδυνο αλλά έχουμε άποψη για την εξέλιξη των αποδόσεων και θέλουμε να αναπτύξουμε κριτήρια λήψης αποφάσεων.

Τα κριτήρια αυτά κάθε φορά μετρούν την αναμενόμενη απόδοση σε σχέση με τον αναλαμβανόμενο κίνδυνο, ο οποίος ταυτίζεται με την εκτιμώμενη συμμετοχή στο κίνδυνο του χαρτοφυλακίου της κάθε θέσης. Το περισσότερο γνωστό κριτήριο αυτής της κατηγορίας είναι ο δείκτης *Risk Adjusted Return on Capital (RAROC)* που ορίζεται ως:

$$RAROC = \frac{κέρδη - κ(κεφάλαιο)}{κεφάλαιο}$$

Στον αριθμητή χρησιμοποιούμε τα αναμενόμενα κέρδη από την επένδυση και αφαιρούμε τα διαφυγόντα κέρδη που ορίζονται σαν το γινόμενο της εναλλακτικής απόδοσης, *κ*, επί το κεφάλαιο που συνεισφέρουν οι μέτοχοι για τη συγκεκριμένη επένδυση (VaR) και στο παρανομαστή το ύψος αυτών των κεφαλαίων.

Η μέθοδος αυτή είναι εξαιρετικά χρήσιμη στη περίπτωση επενδύσεων όπου τα κεφάλαια που «δεσμεύονται» δεν είναι εύκολο να υπολογισθούν, όπως συμβαίνει στη περίπτωση των παραγώγων προϊόντων όπου το κεφάλαιο δεν έχει καμία σχέση με το ύψος της ονομαστικής αξίας του συμβολαίου.

4.6 Υπολογισμός κεφαλαιακής επάρκειας – 2 παραδείγματα

Στα ακόλουθα δύο παραδείγματα υπολογίζουμε την Κεφαλαιακή Επάρκεια (με το «παλαιότερο μοντέλο», Σύμφωνο Βασιλείας 1988).

1^{o} Παράδειγμα:

Κόστος κεφαλαίου: 8%

Τράπεζα XYZ

Ενεργητικό	**Συντελεστής,**	**Αξία,**	**Κεφ. Κινδύνου**
US Treasury Bills	0%	$100	$0
Cash	0%	$200	$0
Claims on other banks	20%	$500	$100
Claims to less developed			
Countries	100%	$1000	$1000
Corporate bonds	100%	$1000	$1000

TOTAL	$2800	$2100
Capital charge 8%		$ 168

Τράπεζα XYZ

Παθητικό	**Αξία**	
Issued shares	$80	
Reserves	$40	
TOTAL		$120
Long-term loans	$ 500	
Deposits	$2180	
TOTAL		$2680
TOTAL		**$2800**

Τράπεζα XYZ

Παθητικό	**Αξία**		
Issued shares	$80		
Reserves	$40		
TOTAL		$120	TIER1 (50% x $168) =$84 !
Long-term loans	$500	TIER2+TIER1=$620>$168 !	
Deposits	$2180		
TOTAL		$2680	
TOTAL		**$2800**	

<u>2ο Παράδειγμα:</u>

Κόστος κεφαλαίου: 20%

Τράπεζα XYZ

Ενεργητικό	**Συντελεστής, Αξία, Κεφ. Κινδύνου**		
US Treasury Bills	0%	\$100	\$0
Cash	0%	\$200	\$0
Claims on other banks	20%	\$500	\$100
Claims to less developed Countries	100%	\$1000	\$1000
Corporate bonds	100%	\$1000	\$1000
TOTAL		\$2800	\$2100
Capital charge 20%			\$ 420

Τράπεζα XYZ

Παθητικό	**Αξία**		
Issued shares	\$80		
Reserves	\$40		
TOTAL		\$120	TIER1 (50% x \$420) =\$210
Long-term loans	\$ 500		TIER2+TIER1=\$620>\$210 !
Deposits	\$2180		
TOTAL		\$2680	
TOTAL		**\$2800**	

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΝΕΠΗ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε το μέτρο κινδύνου, εκθέτουμε αξιώματα για τα μέτρα κινδύνου και τα συσχετίζουμε με τα αξιώματα των αποδεκτών σετ. Συμφωνούμε ότι τα αξιώματα αυτά θα πρέπει να ισχύουν για κάθε μέτρο κινδύνου το οποίο πρόκειται να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να συντονίσει και να διευθύνει αποτελεσματικά τους κινδύνους. Καλούμε τα μέτρα τα οποία ικανοποιούνε τα αξιώματα αυτά « συνεπή – coherent ».

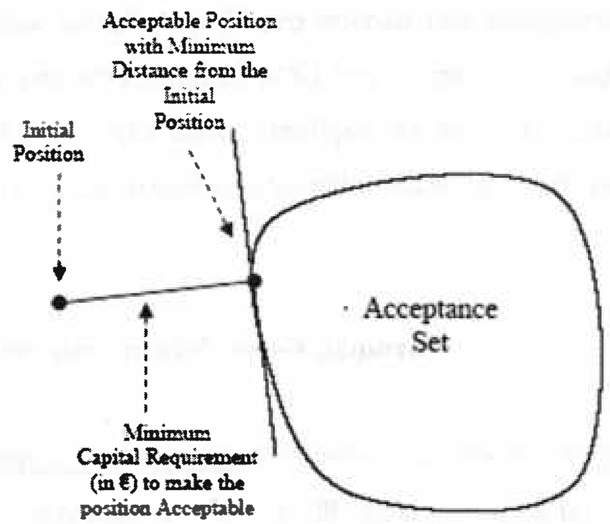
Τα αξιώματα αυτά δεν είναι αρκετά περιοριστικά για να ορίσουνε ένα μοναδικό μέτρο κινδύνου. Αντιθέτως χαρακτηρίζουνε μια μεγάλη τάξη μέτρων κινδύνου. Η επιλογή για το ποιο ακριβώς μέτρο (από αυτή την τάξη) θα χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να πιθανόν να γίνεται με βάση πρόσθετους οικονομικούς λόγους.

Η " υποθετική πρόβλεψη ουράς " (tail conditional expectation – TCE), είναι κάτω από μερικές υποθέσεις η λιγότερο « ακριβή » μεταξύ των μέτρων που είναι συνεπή και αποδεκτά από τους ρυθμιστές, από τη στιγμή που είναι πιο συντηρητικό από τη μέτρηση με το value at risk.

Τα «συνεπή μέτρα κινδύνου» αναπτύχθηκαν αξιωματικά από τους Artzner σε πεπερασμένους χώρους πιθανοτήτων (finite probability spaces). Αργότερα ο Delbaen έκανε το ίδιο και για τους γενικούς χώρους πιθανοτήτων (general probability spaces).

5.2 Ορισμός μέτρου κινδύνου

Προκειμένου να ορίσουμε ένα μέτρο κινδύνου, ξεκινάμε ορίζοντας το σετ αποδοχής (acceptance set) δηλαδή το σετ των μελλοντικών αξιών οι οποίες είναι αποδεκτές για ένα ρυθμιστή και μετά ορίζουμε το μέτρο κινδύνου μέσω της απόστασης μιας ειδικής θέσης από το σετ αυτό αποδοχής. Αυτή η απόσταση μετριέται σε ευρώ και συμβολίζει



Σχήμα 1: Σετ αποδοχής και κεφαλαιακές απαιτήσεις.

Σετ αποδοχής καλείται το σετ στο οποίο δεν απαιτείται λογαριασμός εξισφάλισης (margin account), για παράδειγμα όταν αγοράζω μετοχές ή δικαιώματα προαίρεσης (options). Καλείται και zero-margin σετ γιατί δεν χρειάζεται να έχω χρήματα στο λογαριασμό εξασφάλισης.

Το σετ Α που απεικονίζει το παραπάνω σχήμα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Μια θέση με τελική καθαρή αξία που είναι πάντα θετική δεν απαιτεί επιπλέον κεφάλαια και επομένως ανήκει πάντα στο Α.
2. Μια θέση με τελική καθαρή αξία που είναι πάντα αυστηρά αρνητική, σαφώς και απαιτεί επιπλέον κεφάλαια και επομένως δεν ανήκει στο σύνολο Α.
3. Το σύνολο Α είναι κυρτό, δηλαδή αν οι θέσεις a και b ανήκουν στο Α, τότε και η θέση $\lambda a + (1-\lambda)b$ με $\lambda \in (0,1)$ ανήκει επίσης στο Α.

Ένα μέτρο κινδύνου είναι μια βαθμωτή συνάρτηση $\rho: X \to \Re$ χαρτογραφώντας το διάστημα των τυχαίων μεταβλητών Χ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$. Σε

Ένα μέτρο κινδύνου είναι μια βαθμωτή συνάρτηση $\rho: X \rightarrow \Re$ χαρτογραφώντας το διάστημα των τυχαίων μεταβλητών X στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$. Σε οικονομικούς όρους μεταφράζουμε το ρ(X) σαν το ποσό του κεφαλαίου το οποίο θα πρέπει να προστεθεί σαν προσωρινή αποθήκη σε ένα χαρτοφυλάκιο με κατανομή απόδοσης X έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο να καθίσταται αποδεκτό για το ρυθμιστή.

5.3 Ορισμός συνεπούς μέτρου κινδύνου-Αξιώματα

Ορισμός 1: (Συνέπεια – Coherence): Θεωρούμε ένα σύνολο V πραγματικών τυχαίων μεταβλητών. Μια συνάρτηση $\rho: V \rightarrow \Re$ καλείται συνεπές μέτρο κινδύνου αν ικανοποιεί τα ακόλουθα τέσσερα αξιώματα:

Αξίωμα 1^o: (Monotonicity) Μονοτονία:

$$X, Y \in V,\ Y \geq X \Rightarrow \rho\,(X) \leq \rho(Y)$$

Αξίωμα 2^o: (Positive-linear Homogeneity) Θετική-γραμμική ομογένεια:

$$X \in V,\ h > 0,\ hX \in V \Rightarrow \rho(hX) = h\rho(X)$$

Αξίωμα 3^o: (Subadditivity) Υποπροσθετικότητα :

$$X, Y, X+Y \in V \Rightarrow \rho\,(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Αξίωμα 4^o: (Translation Invariance) Αναλλοίωτο ως προς τη μετάθεση:

$$X \in V,\ \alpha \in \Re \Rightarrow \rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha$$

Όπου X, Y, Z είναι οι τυχαίες μεταβλητές των αποδόσεων αντίστοιχων χαρτοφυλακίων, ενώ ρ(.) είναι το μέτρο κινδύνου του υποκείμενου χαρτοφυλακίου.

Αυτά τα αξιώματα είναι φυσικές απαιτήσεις για κάθε μέτρο που αντανακλά την κεφαλαιακή απαίτηση για δεδομένο ρίσκο.

5.3.1 Μονοτονικότητα (Monotonocity)

Η ιδιότητα της μονοτονικότητας σημαίνει ότι η κάτω πλευρά του ρίσκου μιας θέσης ελαττώνεται αν το προφίλ της πληρωμής είναι αυξανόμενο.

5.3.2 Θετική-Γραμμική ομογένεια (Positive-Linear Homogeneity)

Η θετική ομογένεια είναι μια ιδιότητα η οποία συχνά απαιτείται αλλά η οποία είναι λιγότερο σημαντική οικονομικά. Δηλώνει πως αν το μέγεθος μιας θέσης πολλαπλασιαστεί με έναν θετικό παράγοντα, τότε ο συνδεόμενος κίνδυνος πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο θετικό παράγοντα.

Αυτή η ιδιότητα δίνει μικρή σημασία στην ασυμμετρία μεταξύ κινδύνων και ζημιών. Αυξάνοντας το μέγεθος μιας θέσης κατά ένα συντελεστή λ, μπορεί να αυξήσει το συνδεόμενο κίνδυνο κατά ένα συντελεστή μεγαλύτερο του λ αν τα κόστη των ζημιών που γίνονται είναι αυξάνονται ταχύτερα από ότι το μέγεθός τους. Από τη σκοπιά μιας ατομικής επιχείρησης αυτά τα επιπρόσθετα κόστη μπορούν κατάλληλα να μετρηθούν. Από την πλευρά του ρυθμιστή, υψηλά κόστη μεγάλων ζημιών μπορεί να οδηγήσουν σε αστάθεια του χρηματοοικονομικού συστήματος προκαλώντας ζημιές σε άλλους οργανισμούς.

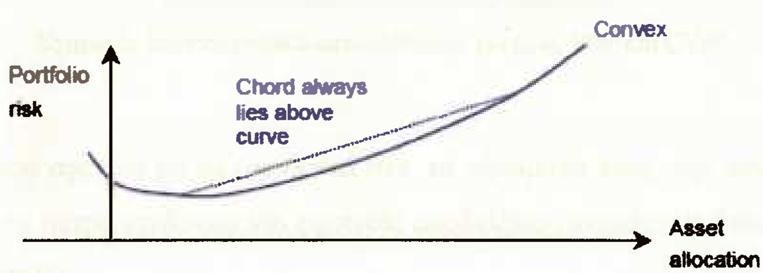
5.3.3 Υποπροσθετικότητα (Subadditivity)

Το σημαντικότερο από αυτά τα αξιώματα είναι το τρίτο γιατί επισημαίνει μια αδυναμία του VaR έναντι του CVaR . Η υποπροσθετικότητα (subadditivity) επιτρέπει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο είναι το άθροισμα μικρότερων χαρτοφυλακίων (sub-portfolios) να έχει κίνδυνο ο οποίος να είναι το πολύ ίσος με το άθροισμα των κινδύνων των επί μέρους χαρτοφυλακίων.

Εάν οι κίνδυνοι είναι υποπροσθετικοί, τότε προσθέτοντας τους μεμονωμένους κίνδυνους μαζί μας δίνει ένα χρήσιμο άνω όριο του συνδυασμένου κινδύνου. Αν οι μέτρο κινδύνου. Αυτό είναι κάτι το οποίο δεν είναι επιθυμητό γιατί εμείς θέλουμε τα μέτρα κινδύνου να είναι είτε αμερόληπτα είτε συντηρητικά μεροληπτικά.

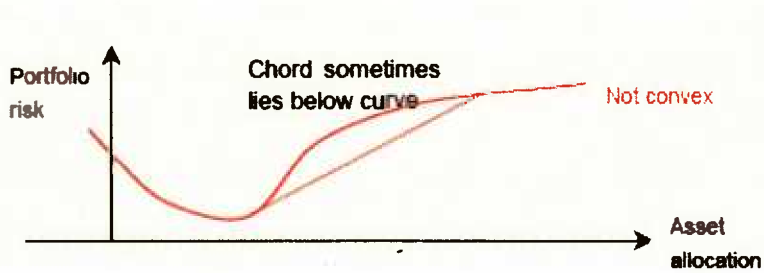
Εάν οι ρυθμιστές χρησιμοποιούσαν ένα μη-υποπροσθετικό μέτρο κινδύνου προκειμένου να θέσουν τις κεφαλαιακές απαιτήσεις, τότε μια χρηματιστηριακή εταιρεία θα δελεαζόταν να σπάσει σε μικρότερες μονάδες έτσι ώστε το άθροισμα των μεμονωμένων κεφαλαιακών απαιτήσεων να είνάι μικρότερο από αυτό της εταιρείας ολόκληρης.

Αποτέλεσμα της υποπροσθετικότητας είναι η κυρτότητα. Η ιδέα εδώ είναι ότι ο κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου θα πρέπει να είναι κυρτή συνάρτηση της κατανομής των περιουσιακών στοιχείων (asset allocation) κάτι που παρουσιάζει το παρακάτω σχεδιάγραμμα.



Σχήμα 2: Κίνδυνος χαρτοφυλακίου και κατανομή περιουσιακών στοιχείων(υπόθεση κυρτότητας).

Στην περίπτωση της μη-κυρτότητας έχουμε:



Σχήμα 3: Κίνδυνος χαρτοφυλακίου και κατανομή περιουσιακών στοιχείων(υπόθεση μη-κυρτότητας).

5.3.4 Αναλλοίωτο ως προς τη μετάθεση (Law Invariance)

Η ιδιότητα αυτή τυποποιεί το γεγονός ότι ο κίνδυνος μετριέται σε χρηματική βάση: εάν ένα χρηματικό ποσό m $\in \Re$ προστεθεί σε μία θέση X, τότε ο κίνδυνος της X μειώνεται κατά m (το ποσό δηλαδή που χρειάζεται για να γίνει η θέση δεκτή από το ρυθμιστή θα πρέπει να μειωθεί κατά το ίδιο ποσό)

Ο παρακάτω πίνακας μας δείχνει συγκεντρωτικά ποια αξιώματα ικανοποιούν ο μέσος, η τυπική απόκλιση (σ), το VaR και το CVaR.

	Homogeneity	Translation	Monotonicity	Subadditivity	Risk sensitivity
Mean	✔	✔	✔	✔	✖
Std dev	✔	(✔)[1]	✖[2]	✔	✖
VaR	✔	✔	✔	✖	✖
CVaR	✔	✔	✔	✔	✔

Source: Credit Suisse First Boston

Σχήμα 3: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα για μ, σ, VaR και CVaR.

Για περισσότερα σχετικά με τα αποδεκτά σετ, τα αξιώματά τους, την αντιστοιχία με τα αξιώματα για τα μέτρα κινδύνου και σχετικές αποδείξεις μπορείτε να δείτε στη διατριβή του Artzner (1998).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΑ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ (CONDITIONAL RISK MEASURES)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΑ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ (CONDITIONAL RISK MEASURES)

6.1 Εισαγωγή

Στις μέρες μας συνεχώς αυξανόμενη προσοχή δίνεται στην αξιωματική μεταχείριση της ποσοτικοποίησης των χρηματοοικονομικών κινδύνων. Ο Artzner, πρότεινε ένα σετ από επιθυμητά αξιώματα που θα πρέπει κάθε μέτρο κινδύνου να ικανοποιεί, ορίζοντας με τον τρόπο αυτό την τάξη των συνεπών μέτρων κινδύνου. Ο Delbaen απέδειξε ότι κάτω από μία ήπια υπόθεση συνέχειας, κάθε συνεπές μέτρο κινδύνου μπορεί να αναπαρασταθεί με τη χειρότερη αναμενόμενη ζημιά ως προς ένα δεδομένο σετ μοντέλων πιθανότητας. Οι Follmer, Schied, Frittelli και Rosazza Gianin εισήγαγαν ανεξάρτητα την πιο γενική τάξη κυρτών μέτρων κινδύνου εξασθενώντας τα αξιώματα της θετικής ομογένειας και υποπροσθετικότητας και αντικαθιστώντας τα με την κυρτότητα.

Αυτό που προσπαθούμε να κάνουμε στο κεφάλαιο αυτό είναι να δώσουμε μια πιθανή αξιωματική θεμελίωση της αποτίμησης του κινδύνου των τελικών αποδόσεων (payoffs) όταν επιπλέον πληροφορία είναι διαθέσιμη. Αυτή είναι η περίπτωση στην οποία, για παράδειγμα, η επικινδυνότητα της απόδοσης η οποία συμβαίνει στο χρόνο T ποσοτικοποιείται σε μια ενδιάμεση ημερομηνία $t \in (0,T)$.

Ορίζουμε τα δεσμευμένα κυρτά μέτρα κινδύνου ως συναρτήσεις (maps), οι οποίες ικανοποιούν κάποια φυσικά αξιώματα, συνδέονται με κάθε απόδοση και αναπαρίστανται με μια τυχαία μεταβλητή X. Η επικινδυνότητα $\rho(X)$ η οποία είναι η ίδια μια τυχαία μεταβλητή εξαρτάται από τη διαθέσιμη πληροφόρηση. Εκτείνουμε τον ορισμό των κυρτών μέτρων κινδύνου σε ένα δεσμευμένο πλαίσιο στο οποίο είναι διαθέσιμη επιπλέον πληροφόρηση και χαρακτηρίζουμε αυτά τα μέτρα κινδύνου μέσω των συνδεόμενων αποδεκτών τους σετ.

6.2 Ορισμός δεσμευμένων μέτρων κινδύνου

Δηλώνουμε με L^0 και L^∞ το διάστημα των τυχαίων μεταβλητών και των ορισμένων τυχαίων μεταβλητών αντίστοιχα, ορισμένα σε ένα σταθερό χώρο πιθανότητας (Ω,F, P). Μία καλή ιδιότητα αυτών των χώρων είναι ότι παραμένουν αμετάβλητα ως προς το μέτρο κινδύνου, υπό τον όρο ότι έχει επιλεγεί από την ισοδύναμη τάξη των P. Αν $G \subseteq F$ είναι η υπό-σ-άλγεβρα, τότε ορίζουμε τους δύο υποχώρους:

$$L_G^0 \overset{\Delta}{=} \{ X \in L^0 \mid X \text{ είναι G-μετρήσιμο}\},$$

$$L_G^\infty \overset{\Delta}{=} L^\infty \cap L_G^0.$$

Τέλος, ορίζουμε τα ακόλουθα δύο σετ μέτρων πιθανότητας:

$$P \overset{\Delta}{=} \{Q\text{- μέτρο πιθανότητας στο } (\Omega, F) \mid Q << P \text{ στο } F \}$$

$$P_G \overset{\Delta}{=} \{Q \in P \mid Q \equiv P \text{ στο } G\}.$$

Τα μέτρα πιθανότητας στο P μπορούν να ερμηνευτούν ως μοντέλα πιθανότητας (probabilistic models). Ένα στοιχείο $X \in L^\infty$ περιγράφει την καθαρή τυχαία απόδοση η οποία απελευθερώνεται σε έναν agent σε μία προκαθορισμένη μελλοντική ημερομηνία. Η σ-άλγεβρα G, συγκεντρώνει τη διαθέσιμη πληροφορία στον agent ο οποίος αποτιμά την επικινδυνότητα της απόδοσης X. Συνεπώς, η μέτρηση κινδύνου του X οδηγεί σε μία τυχαία μεταβλητή ρ(X) η οποία είναι μετρήσιμη ως προς το G, για παράδειγμα ένα στοιχείο από το χώρο L_G^0.

Ορισμός 1: (Δεσμευμένα μέτρα κινδύνου): Αντιστοιχίες του τύπου ρ: $L^\infty \to L_G^0$ ονομάζονται ***δεσμευμένα μέτρα κινδύνου*** (conditional risk measures). Προφανώς, μεταφράζουμε το ρ(X)(ω) ως το βαθμό επικινδυνότητας του X όταν επικρατεί η κατάσταση ω.

<u>Παρατήρηση 1</u>:

Η σ-άλγεβρα G μπορεί να ερμηνευτεί με διάφορους τρόπους. Μπορεί να μοντελοποιήσει την πρόσθετη πληροφορία που είναι διαθέσιμη την ημερομηνία $t = 0$ στον agent. Εναλλακτικά, μπορεί να ερμηνευτεί ως η διαθέσιμη πληροφορία σε μια μελλοντική ημερομηνία $t > 0$, που προκύπτει από την παρατήρηση κάποιων μεταβλητών που σχετίζονται με την απόδοση X στο χρονικό διάστημα (0,t).

Και στις δύο περιπτώσεις, οι πηγές πληροφόρησης μπορούν να δημοσιευτούν, για παράδειγμα να διανεμηθούν από όλους τους agents ή ιδιωτικά. Για το λόγο αυτό, τα δεσμευμένα μέτρα κινδύνου ανοίγουν δρόμο στην ανάλυση των αποτελεσμάτων της ασύμμετρης πληροφόρησης στη διαχείριση κινδύνου.

6.3 Ιδιότητες δεσμευμένων μέτρων κινδύνου

Θεωρούμε τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες που έχει ένα δεσμευμένο μέτρο κινδύνου ρ:

1. <u>(Δεσμευμένα) Αναλλοίωτο ως προς τη μετάθεση</u>: Για κάθε $X \in L^{\infty}$ και $Z \in L^{\infty}_{G}$ ισχύει:
$$\rho(X+Z) = \rho(X) - Z.$$
2. <u>Μονοτονικότητα</u>: Για κάθε $X,Y \in L^{\infty}$:
$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y).$$
3. <u>(Δεσμευμένη) Κυρτότητα</u>: Για κάθε $X,Y \in L^{\infty}$ και $\Lambda \in L^{\infty}_{G}$ με $0 \leq \Lambda \leq 1$:
$$\rho(\Lambda X + (1-\Lambda)Y) \leq \Lambda\rho(X) + (1-\Lambda)\rho(Y).$$

Η οικονομική λογική πίσω από τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τα δεσμευμένα κυρτά μέτρα κινδύνου είναι η ίδια με αυτή της μη-δεσμευμένης περίπτωσης. Συγκεκριμένα, η ιδιότητα του αναλλοίωτου ως προς τη μετάθεση εξασφαλίζει την ερμηνεία ενός κυρτού μέτρου κινδύνου ρ ως τη (δεσμευμένη) κεφαλαιακή απαίτηση. Πράγματι, εύκολα μπορεί να δειχτεί ότι το δεσμευμένο μέτρο κινδύνου ρ είναι μεταφραστικά σταθερό αν και μόνο αν:

$$\rho(X) = \text{essential-infimum}\{Y \in L_G^{\infty} \mid X + Y \in A_{\rho}\},$$

όπου: $A_{\rho} \stackrel{\Delta}{=} \{X \in L_G^{\infty} \mid \rho(X) \leq 0\}$ καλείται το αποδεκτό σετ του ρ.

6.4 Ορισμός δεσμευμένου κυρτού μέτρου κινδύνου

Ορισμός 2: (Δεσμευμένο κυρτό μέτρο κινδύνου): Μία συνάρτηση ρ: $L^{\infty} \rightarrow L_G^{\infty}$ ονομάζεται ***δεσμευμένο κυρτό μέτρο κινδύνου*** (conditional convex risk measure) εάν είναι αναλλοίωτο ως προς τη μετάθεση, μονοτονικό, κυρτό και ικανοποιεί το $\rho(0) = 0$.

Αν δεν έχουμε καμία αρχική πληροφορία, δηλαδή το G είναι η κοινή σ-άλγεβρα, τότε ο ορισμός ενός δεσμευμένου κυρτού μέτρου κινδύνου συμπίπτει με αυτόν του μη-δεσμευμένου.

Παρατήρηση 2:

Μερικές οικονομικές μελέτες προτείνουν την υπόθεση ότι το $\rho(0)$ είναι μια σταθερή τυχαία μεταβλητή. Η επιλογή $\rho(0) = 0$ δεν έχει καμία συγκεκριμένη οικονομική εφαρμογή, αλλά επιτρέπει τη μαθηματική απλούστευση αφού συνεπάγεται ότι $\rho(\alpha) = -\alpha$ για κάθε $\alpha \in \Re$.

6.5 Σχέση δεσμευμένων κυρτών μέτρων κινδύνου και αποδεκτών σετ

Οι ακόλουθες προτάσεις εκθέτουν μερικές σημαντικές σχέσεις μεταξύ των δεσμευμένων κυρτών μέτρων κινδύνου και των αποδεκτών σετ.

Πρόταση 1: Εάν το ρ είναι δεσμευμένο κυρτό μέτρο κινδύνου, τότε το αποδεκτό του σετ A_{ρ} είναι:

1. Δεσμευμένα κυρτό, δηλαδή, $\Lambda A_{\rho} + (1-\Lambda) A_{\rho} \subseteq A_{\rho}$ για κάθε $\Lambda \in L_G^{\infty}$ με $0 \leq \Lambda \leq 1$,

2. <u>Σταθερό</u>, δηλαδή, $X \geq Y \in A_{\rho} \Rightarrow X \in A_{\rho}$,

3. Τέτοιο ώστε essential-infimum $A_{\rho} = 0$ και $0 \in A_{\rho}$.

Αντιστρόφως, εάν ένα σετ $A \subset L^{\infty}$ ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες, τότε η συνάρτηση:

$$\rho_A(X) = \text{essential-infimum}\{Y \in L_G^{\infty} \mid X + Y \in A\}, \quad X \in L^{\infty},$$

είναι ένα δεσμευμένο κυρτό μέτρο κινδύνου.

<u>Παρατήρηση 3:</u>

Ένα δεσμευμένο συνεπές μέτρο κινδύνου μπορεί να οριστεί ως ένα δεσμευμένο κυρτό μέτρο κινδύνου το οποίο είναι θετικά ομογενές, δηλαδή, $\rho(\Lambda X) = \Lambda\rho(X)$ για κάθε $X \in L^{\infty}$ και κάθε $\Lambda \, L_G^{\infty}$ με $\Lambda \geq 0$. Όπως και στη μη-δεσμευμένη περίπτωση, μπορεί εύκολα να δειχτεί ότι η ελάχιστη συνάρτηση ποινής ενός αντιπροσωπευτικού δεσμευμένου, συνεπούς μέτρου κινδύνου ρ μηδενίζεται στο κυρτό σετ:

$$Q^{*} \stackrel{\Delta}{=} \{Q \in P_G \mid E_Q(X \mid G) \geq -\rho(X) \; \forall X \in L^{\infty}\},$$

και διαφορετικά παίρνει την τιμή $+\infty$.

Επομένως, μπορεί να απεικονιστεί ως:

$$\rho(X) = \text{essential-supremum}_{Q^{*} \in Q} \{ -E_Q(X \mid G) \}.$$

Αντίστροφα, κάθε συνάρτηση με τέτοια απεικόνιση είναι ένα δεσμευμένο συνεπές μέτρο κινδύνου. Παράδειγμα δεσμευμένων κυρτών μέτρων κινδύνου τα οποία όμως δεν είναι συνεπή είναι τα λεγόμενα έντροπα μέτρα κινδύνου (entropic risk measures).

6.6 Η ιδιότητα της κανονικότητας

Κατά μία έννοια, η επιπλέον διαθέσιμη πληροφορία στον agent θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί εξολοκλήρου στην αποτίμηση της επικινδυνότητας μιας απόδοσης X. Αυτό σημαίνει πως αν συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι ένα γεγονός $A \in G$ υπερισχύει, τότε η επικινδυνότητα του X θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από το τι πρόκειται πραγματικά να συμβεί, δηλαδή, περιορισμό του X στο A. Αυτή η απλή απαίτηση συλλαμβάνεται από την ακόλουθη ιδιότητα.

Ορισμός 3: (Κανονικότητα): Ένα δεσμευμένο μέτρο κινδύνου ρ: $L^\infty \to L_G^\infty$ λέγεται ***κανονικό*** (regular) αν για κάθε $A \in G$ και X, Y $\in L^\infty$ ισχύει:

$$XI_A = YI_A \Rightarrow \rho(X)I_A = \rho(Y)I_A .$$

Κάποιοι ισοδύναμοι ορισμοί κανονικότητας δηλώνονται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα δεσμευμένο μέτρο κινδύνου ρ:

1. Το ρ είναι κανονικό,
2. $\rho(XI_A) = \rho(X)I_A$ για κάθε $A \in G$ και $X \in L^\infty$,
3. $\rho(XI_A + YI_{A^c}) = \rho(X)I_A + \rho(Y)I_{A^c}$ για κάθε $A \in G$ και X, Y $\in L^\infty$,
4. $\rho\left(\sum_{n=1}^{N} X_n I_{A_n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \rho(X_n) I_{A_n}$ για $A_n \in G$, $X_n \in L^\infty$ και $N \geq 1$.

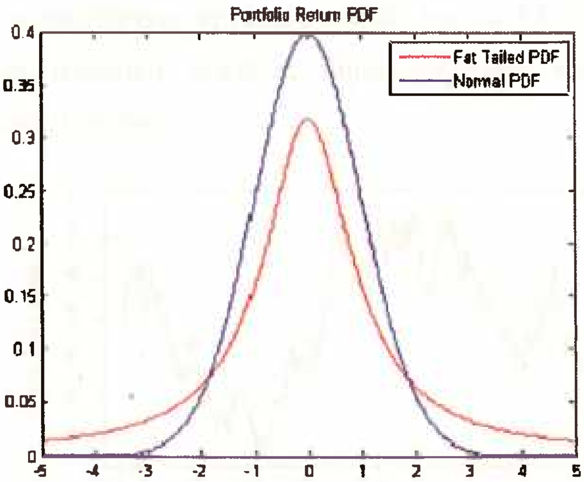
Πρόταση 3: Κάθε δεσμευμένο κυρτό μέτρο κινδύνου είναι κανονικό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

7.1 Το φαινόμενο των παχιών ουρών (thick tails)

Από τις αρχές της δεκαετίας του 60, παρατηρήθηκε από τους Mandelbrot (1963) και Fama (1963, 1965), μεταξύ άλλων ότι οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων έχουν λεπτόκυρτες κατανομές (αποκλίνουν από την κανονική κατανομή). Το γεγονός αυτό εκφράζεται σε μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης των ακραίων τιμών (είτε θετικών είτε αρνητικών) σε αυτές τις κατανομές από ότι στην κανονική κατανομή.

Η κύρτωση των κατανομών αυτών είναι μεγαλύτερη από 3(η κύρτωση της κανονικής κατανομής ισούται με 3). Αυτό είχε ως αποτέλεσμα πλήθος διατριβών να θέτουνε προτάσεις για τη μοντελοποίηση των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων ως i.i.d.(identically, independently, distributed = κατανεμημένα ανεξάρτητα και ισόνομα) γραφήματα προερχόμενα από κατανομές με παχιές ουρές όπως η Paretian ή η Levy κατανομή.



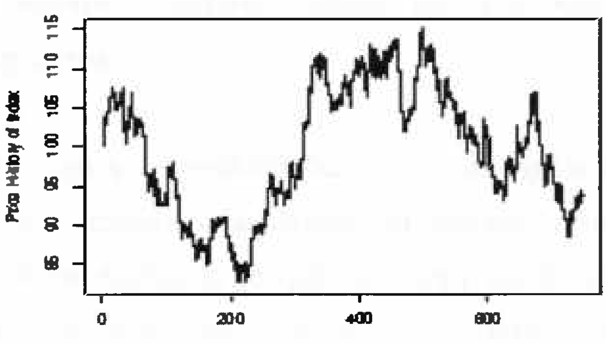
Σχήμα 1: Διάγραμμα δύο κατανομών: Μπλε γραμμή: Κανονική κατανομή και κόκκινη γραμμή: καταγομή με παχιές ουρές.

Η Θεωρία Ακραίων Τιμών (Extreme Value Theory ή EVT) είναι κατά τον Culp ένα υποσύνολο της στατιστικής που επικεντρώνεται στις τιμές των ουρών των κατανομών και ασχολείται με το ρυθμό που αυτές οι τιμές προσεγγίζουν το μηδέν ώστε να καθοριστεί πόσο «παχιά» είναι η ουρά.

7.2 Το volatility clustering phenomenon

Οποιαδήποτε τυχαία παρατήρηση χρηματοοικονομικών χρονικών σειρών αποκαλύπτει μια σχέση μεταξύ επεισοδίων υψηλής και χαμηλής μεταβλητότητας με σπουδαιότερο χαρακτηριστικό ότι η διακύμανση μεταβάλλεται στο χρόνο. Στην πραγματικότητα, η ομαδοποιημένη μεταβλητότητα και οι παχιές ουρές των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων είναι πολύ στενά συνδεδεμένες, τα τετράγωνα των καταλοίπων έχουν σημαντική αυτοσυσχέτιση, δηλαδή οι μεταβλητότητες των παραγόντων της αγοράς τείνουν να ομαδοποιούνται(cluster).

Πράγματι, το τελευταίο αποτελεί μια στατική εξήγηση ενώ βλέποντας από την οπτική των ARCH μοντέλων είναι ένας τυπικός δεσμός μεταξύ δυναμικής (υποθετικής) συμπεριφοράς της μεταβλητότητας και (μη-υποθετικής) συμπεριφοράς των παχιών ουρών. Τα ARCH μοντέλα τα οποία εισήγαγε ο Engle (1982) και οι πολυάριθμες προεκτάσεις που ακολουθήσανε αργότερα καθώς και τα SV (stochastic volatility – στοχαστικής μεταβλητότητας) μοντέλα, δημιουργήθηκαν για να μιμηθούν την ομαδοποιημένη μεταβλητότητα.



Σχήμα 2: Χαμηλές περίοδοι μεταβλητότητας των τιμών του δείκτη (Index)ακολουθούνται από υψηλές περιόδους μεταβλητότητας.

7.3 Το αποτέλεσμα της δυναμικής ασυμμετρίας της χρηματοοικονομικής μόχλευσης (leverage effect)

Πρώτος ο Black (1990) παρατήρησε ότι συχνά αλλαγές στις αποδόσεις των μετοχών δείχνουν μια τάση να συσχετίζονται αρνητικά με τις μεταβολές στη μεταβλητότητα των αποδόσεων, δηλαδή η μεταβλητότητα τείνει να αυξάνεται σε απάντηση «κακών νέων» και να πέφτει σε απάντηση «καλών νέων» μη-συμμετρικά. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται «αποτέλεσμα ισχύος – leverage effect» και μπορεί να εξηγηθεί κατά κάποιο τρόπο από τα σταθερά κόστη, τη χρηματοοικονομική και λειτουργική ισχύ (βλέπε Black (1976) και Christie(1982)).

Όταν έχουμε πτώση της τιμής της μετοχής έχουμε ως αποτέλεσμα μια αυξανόμενη δράση από τις εταιρείες το οποίο συνεπάγεται περισσότερη αβεβαιότητα και επομένως μεταβλητότητα. Αντιθέτως μια αύξηση της τιμής της μετοχής καλλιεργεί θετικό κλίμα για τη μετοχή κάτι το οποίο φαίνεται στην απόδοσή της και μεταφράζεται σε μικρότερη μελλοντική διακύμανση.

Εμπειρικές αποδείξεις αναφερόμενες από τους Black (1976), Christie (1982) και Schwert (1989) προτείνουν ωστόσο ότι η δραστικότητα από μόνη της είναι πολύ μικρή για να εξηγήσει τις εμπειρικές ασυμμετρίες που παρατηρεί κάποιος στις τιμές των μετοχών. Όπως προαναφέραμε, η ασυμμετρία η οποία παρουσιάζεται στη μεταβλητότητα των αποδόσεων των μετοχών είναι πολύ μεγάλη για να μπορεί να εξηγηθεί πλήρως από το leverage effect το οποίο μπορεί μόνο κατά κάποιο μέρος να εξηγήσει τη στενή αρνητική συσχέτιση μεταξύ της τρέχουσας απόδοσης και της μελλοντικής μεταβλητότητας.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ ασθενές (θα λέγαμε ότι σχεδόν δεν υφίσταται) όταν θετικές αποδόσεις των μετοχών ελαττώνουν τη δραστικότητα. Η μεταβολή της μεταβλητότητας η οποία συνδέεται με μια δεδομένη μεταβολή στη δραστικότητα φαίνεται να εξαφανίζεται μετά από μερικούς μήνες. Επίσης δεν υπάρχει φανερό αποτέλεσμα στη μεταβλητότητα όταν η δραστικότητα αλλάζει εξαιτίας μιας αλλαγής σε εξέχουσες οφειλές ή μερίδια παρά μόνο όταν έχουμε μεταβολή στις τιμές των μετοχών.

Μια τυπική εξήγηση συνδέει το φαινόμενο με το αποτέλεσμα που έχει μια μεταβολή της αγοραστικής αξίας των μετοχών μιας εταιρείας με το βαθμό της δραστικότητας στο κεφάλαιό της, με αύξηση της δραστικότητας να φέρνει ως αποτέλεσμα αύξηση στη μεταβλητότητα της μετοχής. Συμπεραίνουμε ότι το 'leverage effect' είναι πράγματι ένα αποτέλεσμα της 'κάτω αγοράς- down market effect-'το οποίο μπορεί να έχει μικρή άμεση σχέση με την ισχύ της εταιρείας.

Σε αντίθεση με το παραπάνω, η βασική σχέση μεταξύ κινδύνου-απόδοσης προβλέπει μια θετική συσχέτιση μεταξύ μελλοντικών αποδόσεων και της τρέχουσας μεταβλητότητας στις τιμές των μετοχών. Ωστόσο, μια εναλλακτική εξήγηση είναι το feedback effect το οποίο μελετάται στους French, Schwert και Stambaugh (1987) και Cambell και Hentschel (1990).

Βέβαια θα πρέπει να επισημάνουμε ότι το φαινόμενο του leverage effect δε συλλαμβάνεται από όλα τα μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας. Το E-GARCH σε αντίθεση με τα μοντέλα ARCH και GARCH μπορεί να δηλώσει την αντίστροφη σχέση μεταξύ παρούσας απόδοσης και μελλοντικής διακύμανσης. Θα αναφέρουμε περισσότερες λεπτομέρειες σε παρακάτω κεφάλαιο που θα μιλήσουμε εκτενέστερα για το E-GARCH μοντέλο.

Περισσότερα για το αποτέλεσμα ισχύος μπορεί κάποιος να βρει στον Kupiec (1990) όπου εκεί το αποτέλεσμα ισχύος ελέγχεται στο περιβάλλον ενός γραμμικού μοντέλου GARCH (p,q).

7.4 Non-trading days (ημέρες μη-συναλλαγών)

Οι χρηματιστηριακές αγορές παραμένουν κλειστές τα Σαββατοκύριακα, τις γιορτές, τις αργίες και την περίοδο διακοπών με αποτέλεσμα όταν επαναλειτουργούν οι τιμές των μετοχών να παρουσιάζουν μεγαλύτερη διακύμανση σε σχέση με τις υπόλοιπες ημέρες. Αιτία γι'αυτό το γεγονός είναι η συσσώρευση πληροφοριών οι οποίες διαχέονται πολύ πιο γρήγορα όταν τελικά έρχονται στην επιφάνεια με το άνοιγμα του Χρηματιστηρίου.

Αν για παράδειγμα η πληροφορία συσσωρεύεται με σταθερό ρυθμό κατά τον ημερολογιακό χρόνο, τότε η διακύμανση των αποδόσεων από το κλείσιμο της Παρασκευής μέχρι το κλείσιμο της Δευτέρας θα έπρεπε να είναι τρεις φορές η διακύμανση από το κλείσιμο της Δευτέρας στο κλείσιμο της Τρίτης.

Ο Fama (1965) και οι French και Roll (1986) βρήκαν ότι, ωστόσο, αυτή η πληροφορία συσσωρεύεται πιο αργά όταν οι αγορές παραμένουν κλειστές από ότι όταν είναι ανοιχτές. Οι διακυμάνσεις είναι πιο υψηλές μετά από Σαββατοκύριακα και αργίες από ότι είναι μετά από άλλες μέρες, αλλά σχεδόν όσο θα αναμενόταν αν ο ρυθμός άφιξης των νέων ήταν σταθερός.

Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας δεδομένα ημερήσιων αποδόσεων για όλες τις NYSE μετοχές από το 1963 μέχρι και το 1982, οι French και Roll (1986) βρήκαν ότι η μεταβλητότητα είναι 70 φορές πιο υψηλή κατά μέσο όρο ανά ώρα όταν η αγορά είναι ανοιχτή από ότι όταν κλείνει. Οι Baillie και Bollerslev (1989) αναφέρουν ποιοτικά παρόμοια αποτελέσματα για τις τιμές ξένου συναλλάγματος.

Για να λάβουμε υπόψη μας σε ένα υπόδειγμα πόσες ημέρες είναι ανοικτό το Χρηματιστήριο λαμβάνοντας υπόψη το non-trading day χρησιμοποιούμε ψευδομεταβλητές.

7.5 Συμμεταβολές στις μεταβλητότητες (co-movements in volatilities)

Το φαινόμενο αυτό θα το εξηγήσουμε παραθέτοντας ένα παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε 10 τραπεζικές μετοχές. Αν έχουμε άσχημα νέα για τον τραπεζικό τομέα τότε οι διακυμάνσεις των μετοχών θα κινηθούν προς την ίδια κατεύθυνση, δηλαδή θα αυξηθούν. Επομένως παίρνουμε πληροφορίες για τη συμμεταβολή των μετοχών ενός κλάδου.

Ολοκληρώνοντας, να τονίσουμε πως τα μοντέλα ετεροσκεδαστικότητας θα πρέπει να συλλαμβάνουν τα περισσότερα από αυτά τα χαρακτηριστικά ώστε να μπορούν να προβλέψουν επιτυχώς τη μελλοντική διακύμανση και κατ'επέκταση το value at risk.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

8.1 Εισαγωγή

Η μεταβλητότητα έχει γίνει απαραίτητο θέμα στις χρηματοοικονομικές αγορές για τους διαχειριστές κινδύνου, τους διαχειριστές χαρτοφυλακίων, τους επενδυτές, τους ακαδημαϊκούς, και σχεδόν όλους όσους έχουν να κάνουν με τις χρηματοοικονομικές αγορές. Η ακριβής πρόβλεψη της μελλοντικής διακύμανσης και των συσχετίσεων των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων είναι απαραίτητη στην τιμολόγηση παραγώγων, τη βέλτιστη κατανομή των περιουσιακών στοιχείων, τη διαχείριση κινδύνου του χαρτοφυλακίου, τη δυναμική εξισορρόπηση κινδύνου και τέλος αποτελεί εισαγωγική πληροφορία για τα Value-at-Risk μοντέλα.

Η σπουδαιότητα της πρόβλεψης της μεταβλητότητας τονίστηκε όταν το 2003, ο καθηγητής R.F Engle τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ για την εξέχουσα συμβολή του στη μοντελοποίηση της δυναμικής μεταβλητότητας.

“Το πλεονέκτημα της γνώσης των κινδύνων είναι ότι έχουμε τη δυνατότητα να αλλάξουμε τη συμπεριφορά μας για να τους αποφύγουμε. Φυσικά, είναι απόλυτα κατανοητό ότι το να αποφύγει κανείς όλους τους κινδύνους είναι πράγμα αδύνατο. Δε θα έπαιρνα το βραβείο αυτό αν επιχειρούσα να αποφύγω όλους τους κινδύνους.
Υπάρχουν κάποια ρίσκα τα οποία αποφασίζουμε να αναλάβουμε γιατί τα οφέλη που έχουμε παίρνοντάς τα υπερβαίνουν δυνητικά κόστη.

Η βέλτιστη συμπεριφορά μας λέει ότι αναλαμβάνουμε ρίσκα τα οποία αξίζουν τον κόπο. Αυτό αποτελεί το κεντρικό παράδειγμα στα χρηματοοικονομικά: θα πρέπει να πάρουμε κάποια ρίσκα για να ανταμειφθούμε, όμως όλα τα ρίσκα δεν ανταμείβονται ισάξια. Τόσο τα ρίσκα όσο και οι ανταμοιβές ανήκουν στο μέλλον, επομένως είναι η αναμενόμενη ζημιά η οποία εξισορροπείται ενάντια στην αναμενόμενη ανταμοιβή. Συνεπώς, βελτιστοποιούμε τη συμπεριφορά μας και πιο ειδικά το χαρτοφυλάκιό μας προκειμένου να μεγιστοποιήσουμε την ανταμοιβή μας (την απόδοσή μας) και να ελαχιστοποιήσουμε τους κινδύνους.”[1]

Οι συμφωνίες της Βασιλείας του 1996 και του 1999 κατέστησαν αναγκαστικό για τα χρηματοοικονομικά ιδρύματα να συμπεριλάβουν την έκθεση στο χρηματοοικονομικό κίνδυνο όταν υπολογίζουν τις βασικές κεφαλαιακές απαιτήσεις. Αυτό κάνει την πρόβλεψη μεταβλητότητας μια υποχρεωτική εργασία για όλα τα χρηματοοικονομικά ιδρύματα.

Ένα μεγάλο τμήμα της διαχείρισης κινδύνου μετράει τις μελλοντικές δυνητικές ζημιές ενός χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων, και προκειμένου να μετρήσει τις δυνητικές αυτές ζημιές, θα πρέπει να γίνονται εκτιμήσεις σχετικά με τις μελλοντικές μεταβλητότητες και συσχετίσεις.

Πιθανόν, η πιο ενδιαφέρουσα εφαρμογή της πρόβλεψης μεταβλητότητας είναι για να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να αναπτυχθεί μια στρατηγική συναλλαγών. (volatility trading strategy). Οι κάτοχοι δικαιωμάτων προαίρεσης συνήθως αναπτύσσουν τη δική τους πρόβλεψη για τη μεταβλητότητα, και βασισμένοι στην πρόβλεψη αυτή συγκρίνουν την εκτίμησή τους για την αξία του δικαιώματος με την αντίστοιχη τιμή της αγοράς για το δικαίωμα αυτό.

Υπάρχουν πολλά μοντέλα χρηματοοικονομικών σειρών τα οποία χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη της μεταβλητότητας της αγοράς. Ανάμεσα στα πιο δημοφιλή μοντέλα τα οποία χρησιμοποιούνται από επαγγελματίες της αγοράς είναι:

1. Η ιστορική διακύμανση (historical variance).
2. Το εκθετικά σταθμισμένο κινούμενου μέσου (Exponential Weighted Moving Average - EWMA).
3. Το γενικά αυτοπαλινδρούμενο δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας μοντέλο- Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic model - GARCH" (Ederington and Guan, 2005).

---

[1] Engle 2003, Noble Lecture, page 326.

Αυτά τα τρία μοντέλα ανήκουν στη ονομαζόμενη "γραμμικά τετραγωνική απόκλιση – Linear Squared Deviation- (LSD) " τάξη των εκτιμητών γιατί η πρόβλεψη της διακύμανσης είναι γραμμικός συνδυασμός του τετραγώνου της τυπικής απόκλισης των πρόσφατων αποδόσεων από τις αναμενόμενες τιμές τους.

8.2 Δυσκολίες πρόβλεψης μεταβλητότητας

Η μεταβλητότητα των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων είναι χρονικά μεταβαλλόμενη και προβλέψιμη, αλλά το να προβλέψεις το μελλοντικό επίπεδο της μεταβλητότητας είναι δύσκολο για τουλάχιστον τρεις λόγους:

1. Οι προβλέψεις της μεταβλητότητας είναι ευαίσθητες στο να προσδιορίσουν ένα μοντέλο για τη μεταβλητότητα. Πιο συγκεκριμένα, είναι σημαντικό να ανακαλύψει κάποιος την κατάλληλη ισορροπία μεταξύ του να συλλάβει τα σιωπηρά χαρακτηριστικά των δεδομένων και να προσαρμόσει κατάλληλα τα δεδομένα.

2. Η σωστή εκτίμηση των παραμέτρων ενός μοντέλου μεταβλητότητας είναι δύσκολη διαδικασία από τη στιγμή που η μεταβλητότητα δεν είναι παρατηρήσιμη. Όσο περισσότερο απέχουν οι εκτιμημένες παράμετροι από τις πραγματικές παραμέτρους, τόσο χειρότερη (όχι κατάλληλη) είναι η μεταβλητότητα που προβλέπουμε.

3. Οι προβλέψεις της μεταβλητότητας εμπεριέχουν θόρυβο ο οποίος προέρχεται από το γεγονός ότι αυτές είναι συναρτήσεις και της πραγματικής μεταβλητότητας αλλά και του z ή εκτιμήσεις του τρέχοντος επιπέδου μεταβλητότητας. Ακόμη και με ένα τέλεια καθορισμένο και εκτιμημένο μοντέλο μεταβλητότητας, οι εκτιμήσεις της μελλοντικής μεταβλητότητας «κληρονομούν» ή ενδεχομένως ακόμα ενισχύουν την αβεβαιότητα σε σχέση με το τρέχον επίπεδο μεταβλητότητας.

Σκοπός μας είναι να παρέχουμε ένα πλαίσιο πρόβλεψης της μεταβλητότητας το οποίο να απευθύνεται στα παραπάνω τρία ζητήματα.

8.3 Ιστορική μεταβλητότητα

Η πιο απλή προσέγγιση για να εκτιμήσουμε τη μεταβλητότητα είναι να χρησιμοποιήσουμε την ιστορική τυπική απόκλιση. **(Εφαρμογή 1η στο Excel).** Υπάρχουν όμως εμπειρικές αποδείξεις σύμφωνα με τις οποίες η μέθοδος μπορεί να βελτιωθεί με τη χρήση πιο πολύπλοκων μοντέλων για τη μεταβλητότητα. **(Εφαρμογή 2η σε Matlab).**

Στην πιο απλή περίπτωση, ο υπολογισμός της μεταβλητότητας μπορεί να γίνει με βάση τις ιστορικές τιμές της υποκείμενης αξίας. Για τον υπολογισμό της μεταβλητότητας της τιμής, για παράδειγμα μιας μετοχής, συνήθως παίρνουμε τις τιμές της μετοχής ανά τακτά χρονικά διαστήματα (π.χ ημερήσιες τιμές κλεισίματος).

Έστω ότι παίρνουμε n+1 τιμές. Συμβολίζουμε με S_i την τιμή της μετοχής κατά την περίοδο i (i = 0,1,2,…,n). Θεωρούμε πως $S_i = S_{i-1} e^{u_i}$ όπου u_i είναι η (συνεχώς κεφαλαιοποιούμενη – continuously compounded) απόδοση (return) στη διάρκεια του χρονικού διαστήματος που ορίζεται από τις στιγμές i και i-1. Η μεταβλητότητα σ ορίζεται από τη μαθηματική έκφραση:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i - u_{ave})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i)^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2}}$$

όπου το άθροισμα Σ λαμβάνει υπ'όψιν του τις τιμές i από 1 έως n (u_{ave} είναι ο μέσος όρος των αποδόσεων u_i).

Για τους υπολογισμούς VaR, η απόδοση προσεγγίζεται ως:

$$u_i = \frac{(S_i - S_{i-1})}{S_{i-1}},$$

- η u_{ave} προσεγγίζεται συνήθως ως μηδέν[1], και
- ο συντελεστής $\frac{1}{n-1}$ προσεγγίζεται ως $\frac{1}{n}$.[2]

Όσον αφορά τη χρονική μετατροπή της μεταβλητότητας, η ημερήσια μεταβλητότητα υπολογίζεται από την ετήσια μεταβλητότητα ως εξής:

$$\boxed{\sigma_{\text{ΕΤΗΣΙΑ}} = \frac{\sigma_{\text{ΗΜΕΡΗΣΙΑ}}}{\sqrt{252}}}$$

<u>**Σημείωση:**</u> Υποθέτουμε πως ο χρόνος έχει 252 εργάσιμες ημέρες, δηλαδή ημέρες κατά τις οποίες οι αγορές είναι σε λειτουργία (trading days). Όμως, ο υπολογισμός αυτός που συνήθως παρουσιάζεται στα εκπαιδευτικά εγχειρίδια πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή ειδικά όταν το χρονικό διάστημα είναι μεγαλύτερο των 10 ημερών.

---

1 Αυτή η υπόθεση έχει πολύ μικρή επίδραση στις εκτιμήσεις της διακύμανσης γιατί η αναμενόμενη μεταβολή μιας μεταβλητής για μία ημέρα είναι πολύ μικρή συγκρινόμενη με την τυπική απόκλιση των μεταβολών.

2 Αντικαθιστώντας το n-1 με το n, οδηγούμαστε από μία αμερόληπτη εκτίμηση της διακύμανσης σε μία μέγιστη εκτίμηση πιθανοφάνειας. Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας αναφέρονται στη συνέχεια του κεφαλαίου.

Οι ιστορικές μετρήσεις της μεταβλητότητας είναι απλά απλές μετρήσεις μέσων όρων, όπως για παράδειγμα η τυπική απόκλιση των ημερήσιων αποδόσεων για μια περίοδο τριών ετών. Για το λόγο αυτό είναι πολύ εύκολη στον υπολογισμό της αλλά «υποφέρει» από έναν αριθμό ελλείψεων:

- Οι παρατηρήσεις δεν είναι σταθμισμένες:
  - Ανταποκρίνονται αργά σε αλλαγές συνθηκών.
  - Δεν επωφελείται από βραχυχρόνια επιμονή της μεταβλητότητας η οποία θα μπορούσε να οδηγήσει σε ακριβείς βραχυχρόνιες προβλέψεις.

- Αποτέλεσμα ενός ακραίου γεγονότος (για παράδειγμα μιας χρεοκοπίας της αγοράς):
  - Η μετρούμενη μεταβλητότητα ανεβαίνει ψηλά για έναν αριθμό παρατηρήσεων ίσο με το παράθυρο μέτρησης) και μετά θα πέσει ξαφνικά (αντί ομαλά). Στην ουσία αποτελεί έναν εκτιμητή που διαμορφώνεται από τους κινητούς μέσους των τετραγώνων των παρατηρήσεων και εξαιτίας του θορύβου δεν είναι ομαλός - π.χ. η πρόβλεψη που παίρνουμε από τα υποδείγματα ετεροσκεδαστικότητας είναι στην ουσία σταθμισμένος κινητός μέσος των τετραγώνων με συνέπεια την μερική εξομάλυνση του κινδύνου

Οι ιστορικές τιμές μπορούν να μας δώσουν ένα μέτρο της μεταβλητότητας της υποκείμενης αξίας, όμως σε πιο προχωρημένο επίπεδο χρησιμοποιούνται πολύπλοκα μοντέλα για τον υπολογισμό της, όπως αυτά της οικογένειας μοντέλων ARCH και GARCH.

8.4 Conditional vs Unconditional διακύμανσης

Στη στατιστική, όταν οι τυπικές αποκλίσεις μιας μεταβλητής εξετάζονται για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, τότε δεν είναι σταθερές. Η ετεροσκεδαστικότητα είναι σε δύο μορφές: τη δεσμευμένη και την αδέσμευτη. Η δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα προσδιορίζει μη-σταθερή μεταβλητότητα όταν μελλοντικές περίοδοι υψηλής και χαμηλής μεταβλητότητας δε μπορούν να προσδιοριστούν.

Η μη-δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα χρησιμοποιείται όταν μελλοντικές περίοδοι υψηλής και χαμηλής μεταβλητότητας μπορούν να προσδιοριστούν. Χρονική μεταβολή της μη-δεσμευμένης διακύμανσης θα σήμαινε μη-στασιμότητα των τετραγώνων των αποδόσεων το οποίο δεν είναι κάτι που παρατηρείται στις αποδόσεις.

Στα χρηματοοικονομικά, η δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα συναντάται στις τιμές των μετοχών και των ομολόγων. Το επίπεδο μεταβλητότητάς τους δε μπορεί να προβλεφθεί για κάθε χρονική περίοδο. Η μη-δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μεταβλητές που έχουν εποχική μεταβλητότητα η οποία μπορεί να προσδιοριστεί, όπως είναι η χρήση ηλεκτρισμού.

Για σειρές οι οποίες επιδεικνύουν μεταβλητότητα, η αδέσμευτη διακύμανση μπορεί να είναι σταθερή ακόμη και αν η διακύμανση κατά τη διάρκεια κάποιων περιόδων είναι ασυνήθιστα μεγάλη.

Πολλές φορές, μόνο η δεσμευμένη διακύμανση είναι σημαντική για εμάς. Για παράδειγμα, αν είμαστε κάτοχοι κάποιου χαρτοφυλακίου, αυτό που θα μας ενδιαφέρει είναι οι προβλέψεις της απόδοσης και της διακύμανσης για την περίοδο παρακράτησης του χαρτοφυλακίου. Η αδέσμευτη διακύμανση (δηλαδή, η μακροχρόνια πρόβλεψη της διακύμανσης) δε θα είναι σημαντική αν σχεδιάζουμε να αγοράσουμε το περιουσιακό στοιχείο στο χρόνο t και να το πουλήσουμε στο χρόνο $t+1$.

Πολλές οικονομικές χρονολογικές σειρές επιδεικνύουν περιόδους ασυνήθιστα υψηλής μεταβλητότητας η οποία ακολουθείται από περιόδους σχετικής ηρεμίας. Κάτω από τέτοιες συνθήκες, η υπόθεση της σταθερής διακύμανσης (ομοσκεδαστικότητα) δεν είναι κατάλληλη.

Η ορθολογική υπόθεση επιβάλλει ότι κανείς δε θέλει να σπαταλήσει χρήσιμη πληροφορία. Στην πρόβλεψη κάθε χρονολογικής σειράς, κάποιος που είναι ορθολογικός χρησιμοποιεί τη δεσμευμένη κατανομή (conditional distribution) αντί της μη-δεσμευμένης κατανομής (unconditional distribution) των σειρών αυτών.

Καταρχάς, προκειμένου να δείξουμε τη διάκριση μεταξύ της δεσμευμένης και της μη-δεσμευμένης διακύμανσης θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλό AR(1) μοντέλο το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$y_t = \varphi_0 + \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Σε αυτό το AR(1) μοντέλο υποθέτουμε ότι $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) \equiv \sigma^2_\varepsilon$. Αυτή είναι επίσης και η διακύμανση των y_t δεδομένων (με την υπόθεση) των y_{t-1}, $\mathrm{Var}(y_t | y_{t-1})$. Κρατώντας σταθερό το y_{t-1} η μόνη πηγή μεταβολής των y_t είναι τα ε_t. Αυτό φαίνεται και από τα παρακάτω:

$$\mathrm{Var}(y_t | y_{t-1}) = \mathrm{Var}[(\varphi_0 + \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t) | y_{t-1}]$$

$$\mathrm{Var}(y_t | y_{t-1}) = 0 + \mathrm{Var}(\varphi_1 y_{t-1} | y_{t-1}) + \mathrm{Var}(\varepsilon_t | y_{t-1})$$

$$\mathrm{Var}(y_t | y_{t-1}) = 0 + 0 + \mathrm{Var}(\varepsilon_t | y_{t-1})$$

$$\mathrm{Var}(y_t | y_{t-1}) = \sigma^2_\varepsilon$$

Αυτό προκύπτει από τη στιγμή που τα (φ_0) και $(\varphi_1 \; y_{t-1})$ είναι σταθερές όταν το y_{t-1} είναι δεδομένο και από την υπόθεση τη σταθερής δεσμευμένης διακύμανσης των ε_t. Αν η δεσμευμένη διακύμανση των ε_t δεν είναι σταθερή, τότε η δεσμευμένη διακύμανση των y_t ισούται με:

$$\mathrm{Var}(y_t | y_{t-1}) = \sigma^2_t$$

Τώρα ας υπολογίσουμε τη μη-δεσμευμένη διακύμανση των y_t:

$$\mathrm{Var}(y_t) = \mathrm{Var}\,(\varphi_0 + \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$\mathrm{Var}(y_t) = \mathrm{Var}\,(\varphi_0) + \mathrm{Var}\,(\varphi_1 y_{t-1}) + \mathrm{Var}\,(\varepsilon_t)$$

$$\sigma^2_y = 0 + \varphi_1^2 \; \mathrm{Var}\,(y_{t-1}) + \mathrm{Var}\,(\varepsilon_t)$$

$$\sigma_y^2 = \varphi_1^2\ \sigma_y^2\ + \sigma_\varepsilon^2$$

$$(1\text{-}\varphi_1^2)\ \sigma_y^2\ = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi_1^2)}$$

όπου $\mathrm{Var}(y_t) = \mathrm{Var}\ (y_{t-1}) = \sigma_y^2$

και $\mathrm{Var}\ (\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$

Εδώ, σ_y^2 είναι η μη-δεσμευμένη διακύμανση. Αν συγκρίνουμε τη δεσμευμένη με τη μη-δεσμευμένη διακύμανση των y_t μπορούμε να δούμε ότι η μη-δεσμευμένη διακύμανση μπορεί να είναι σταθερή ενώ η δεσμευμένη διακύμανση μπορεί να μεταβάλλεται στο χρόν

8.5 Μοντέλα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας

8.5.1 Εισαγωγή

Οι πιο δημοφιλείς τεχνικές οι οποίες προτάθηκαν για τη μοντελοποίηση των χαρακτηριστικών των χρονολογικών σειρών (όπως υπερβάλλουσα κύρτωση, παχιές ουρές, volatility clustering κ.α.) ήταν από τον Engle (1982), η 'αυτοπαλίνδρομη διαδικασία δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας' – 'Autoregressive Conditional Heteroscedasticity process (ARCH)' και από τον Bollerslev (1986), η 'γενικευμένα αυτοπαλίνδρομη διαδικασία δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας' – 'Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity process (GARCH)'. Από τη στιγμή που το συμμετρικό GARCH μοντέλο δε μπορεί να αντιμετωπίσει επιτυχώς θέματα ασυμμετρίας ή αλλιώς όπως καλείται το 'leverage effect', χρησιμοποιήθηκε η 'εκθετικά γενικευμένα αυτοπαλίνδρομη διαδικασία δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας' – 'Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity process (EGARCH)' η οποία προτάθηκε από το Nelson (1990).

Η 'αυτοπαλίνδρομη διαδικασία δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας' – 'Autoregressive Conditional Heteroscedasticity process (ARCH) θεωρήθηκε το πιο επιτυχές μοντέλο για να συλλάβει το volatility clustering, την υπερβάλλουσα κύρτωση και τις παχιές ουρές των χρηματοοικονομικών σειρών, τόσο από τους ακαδημαϊκούς ερευνητές όσο και από τους επαγγελματίες της αγοράς. Από τη στιγμή που η εμπειρική εφαρμογή ενός ARCH (q) μοντέλου απαιτούσε μεγάλες σε μήκος υστερήσεις και μεγάλο αριθμό υπό εκτίμηση παραμέτρων, ο Bollerslev (1986) πρότεινε ένα GARCH (p,q) μοντέλο στο οποίο η μεταβλητότητα στο χρόνο t επηρεάζεται επίσης και από τις p υστερήσεις της παρελθούσας εκτιμημένης μεταβλητότητας.

Ένα χρήσιμο χαρακτηριστικό ενός GARCH μοντέλου είναι μπορεί να μετακινήσει αποτελεσματικά την υπερβάλλουσα κύρτωση των αποδόσεων αλλά απέτυχε να μοντελοποιήσει την ασυμμετρία των σειρών ή όπως διαφορετικά καλείται 'leverage effect'. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού ο Nelson (1990) πρότεινε το 'εκθετικά γενικευμένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας' – 'Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity model (EGARCH)'.

8.5.2 Μοντέλο GARCH

Ένα από τα πιο γνωστά ευρέως μοντέλα μεταβλητότητας είναι το μοντέλο GARCH (Bollerslev, 1986) για το οποίο η δεσμευμένη διακύμανση ελέγχεται από μία γραμμικά αυτοπαλινδρούμενη διαδικασία των παρελθόντων τετραγώνων των αποδόσεων και των διακυμάνσεων.

Υποθέτουμε ότι τα $\{\varepsilon_t\}$είναι μια διακριτού χρόνου στοχαστική διαδικασία η οποία καλείται διαδικασία σφάλματος. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση του μέσου είναι της μορφής $y_t = \varepsilon_t$, με τα y_t να είναι η διαδικασία των παρατηρήσεων.

Το 'Γενικευμένο – Generalized ARCH (GARCH)' μοντέλο του Bollerslev (1986) δίνεται από την ακόλουθη φόρμουλα δύο σταδίων:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t,\ t = 0,\ldots,T \qquad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2,\ t = 1,\ldots,T, \qquad (2)$$

όπου τα z_t είναι i.i.d. με $E(z_t) = 0$ και $Var(z_t) = 1$. Επίσης, τα α_i και β_j θα πρέπει να ικανοποιούν συνθήκες μη-αρνητικότητας και αντιστρεψιμότητας, $\alpha_i + \beta_j \leq 1$. Η επιμονή (persistence) μετριέται από το $\ln 0.5/ \ln(\alpha+\beta)$.

Το σ_t^2 είναι η (δεσμευμένη) διακύμανση της διαδικασίας των $\{\varepsilon_t\}$στο χρόνο t, οι p,q είναι ακέραιοι αριθμοί με $p > 0$, $q \geq 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\iota = 1,\ldots, p$, και $\beta_j \geq 0$, $j = 1,\ldots, q$. Στη σχέση (2) υποτίθεται ότι $\varepsilon_t = \sigma_t = 0$ για $t < 0$.

Υποθέτοντας ότι τα z_t είναι κανονικά κατανεμημένα, το διάνυσμα των παραμέτρων που πρόκειται να εκτιμηθεί στις σχέσεις (1) και (2) είναι, για $q > 0$, $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q, \sigma_0^2)$. Η πιθανοφάνεια για ένα δείγμα με T+1 παρατηρήσεις, $y = (y_0, \ldots, y_T)$ μπορεί να γραφτεί ως:

$$l_N(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{T+1}{2}} \prod_{t=0}^{T} \left\{ (\sigma_t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2} \right) \right\},$$

όπου τα ε_t δίνονται από την αντίστοιχη εξίσωση του μέσου και τα σ_t^2 εκφράζονται μέσω της σχέσης (2).

Κάτω από την υπόθεση μιας student-t κατανομής (Bollerslev, 1987, Baillie και Bollerslev, 1989) για τη διαδικασία των σφαλμάτων $\{\varepsilon_t\}$, η πιθανοφάνεια για ένα δείγμα T+1 παρατηρήσεων, y μπορεί να γραφτεί ως:

$$l_T(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=0}^{T} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n}{2})[(n-2)\sigma_t^2]^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{(n-2)\sigma_t^2} \right)^{-\frac{n+1}{2}} \right\},$$

όπου το n > 2 δηλώνει τους βαθμούς ελευθερίας της student-t κατανομής, τα ε_t δίνονται από την αντίστοιχη εξίσωση του μέσου, το σ_t^2 καθορίζεται μέσω της σχέσης (2) και το διάνυσμα των παραμέτρων το οποίο πρόκειται να εκτιμηθεί είναι το **θ** = (θ = $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q, \sigma_0^2, n)$.

Για να εκτιμήσουμε το μοντέλο και να ποσοτικοποιήσουμε την αβεβαιότητα των παραμέτρων του μοντέλου, χρησιμοποιήσουμε την κλασσική μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.

8.5.2.1 Μειονεκτήματα του μοντέλου GARCH

Όπως έχει αναφερθεί από τον Nelson (1991), υπάρχουν τρία μειονεκτήματα όσο αφορά τα GARCH μοντέλα.

<u>1ο Μειονέκτημα:</u>

Η υποθετική διακύμανση (conditional variance) των GARCH μοντέλων (συμπεριλαμβανομένου και των ARCH μοντέλων σαν την ειδική περίπτωση στην οποία τα β = 0), επιβάλλουν σημαντικούς περιορισμούς για τα GARCH μοντέλα. Για παράδειγμα, το "leverage effect" δε λαμβάνεται υπόψιν στα GARCH μοντέλα

<u>2ο Μειονέκτημα:</u>

Ένας άλλος περιορισμός των GARCH μοντέλων προκύπτει από τους περιορισμούς μη-αρνητικότητας για τα α και β προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι το σ_t^2 παραμένει μη-αρνητικό για όλα τα t με πιθανότητα 1. Επιπλέον, αυτοί οι μη-αρνητικοί περιορισμοί μπορεί να δημιουργήσουν δυσκολίες στην εκτίμηση των GARCH μοντέλων.

3^o Μειονέκτημα:

Ένα τρίτο μειονέκτημα της GARCH μοντελοποίησης αφορά την ερμηνεία της "επιμονής" των σοκ στην υποθετική διακύμανση. Σε πολλές μελέτες σχετικά με τη συμπεριφορά των χρονολογικών σειρών στη μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων, το κεντρικό ερώτημα είναι για πόσο καιρό επιμένουν τα σοκ στην υποθετική διακύμανση. Εάν τα σοκ επιμένουν αόριστα στη μεταβλητότητα, μπορεί να μετακινήσουνε ολόκληρη την έκφραση της δομής του αρχικού κινδύνου (risk premia), και επομένως είναι πιθανό να έχουμε σημαντική επίδραση στην επένδυση σε μακροχρόνια κεφαλαιακά αγαθά.

8.5.2.2 Περιορισμοί του μοντέλου GARCH

- Η αρνητική συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων των μετοχών και των μεταβολών στη μεταβλητότητα των αποδόσεων, δηλαδή η μεταβλητότητα τείνει να αυξάνεται σε απάντηση 'κακών νέων', (οι υπερβάλλουσες αποδόσεις είναι κατώτερες από ότι αναμένεται) και να πέφτει σε απάντηση 'καλών νέων', (οι υπερβάλλουσες αποδόσεις είναι υψηλότερες από ότι αναμένεται). Τα μοντέλα GARCH υποθέτουν ότι μόνο το μέγεθος και όχι η θετικότητα ή η αρνητικότητα των απρόσμενων υπερβαλλουσών αποδόσεων χαρακτηρίζει το σ_t^2. Αν η κατανομή των z_t είναι συμμετρική, η αυριανή μεταβολή στη διακύμανση είναι δεσμευμένα ασυσχέτιστη με τις υπερβάλλουσες αποδόσεις σήμερα. Αν γράψουμε το σ_t^2 σα συνάρτηση των υστερήσεων των σ_t^2 και των υστερήσεων των z_t^2, όπου $\varepsilon_t^2 = z_t^2 \sigma_t^2$.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{q} a_j z_{t-j}^2 \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

είναι φανερό ότι η δεσμευμένη διακύμανση είναι σταθερή στις μεταβολές του προσήμου των z_t. Επιπλέον, τα $z_{t-j}^2 \sigma_{t-j}^2$ δεν είναι i.i.d.

- Ένας άλλος περιορισμός των GARCH μοντέλων προκύπτει από τους περιορισμούς μη-αρνητικότητας, οι οποίοι θέτονται για να εξασφαλίσουν ότι το σ_t^2 παραμένει μη-αρνητικό για όλα τα t με πιθανότητα 1. Αυτοί οι περιορισμοί συνεπάγονται ότι αυξάνοντας το z_t^2 σε κάθε περίοδο, αυξάνεται το σ_{t+m}^2 για όλα τα $m \geq 1$, αποκλείοντας τυχαία ταλαντωτή διαδικασία στη διαδικασία των σ_t^2.

- Τα GARCH μοντέλα δεν είναι ικανά να ερμηνεύσουν την παρατηρούμενη συνδιακύμανση μεταξύ των ε_t^2 και των ε_{t-j}. Αυτό είναι δυνατό μόνο αν η δεσμευμένη διακύμανση ως μία ασύμμετρη συνάρτηση των ε_{t-j}.

- Στο μοντέλο GARCH (1,1), τα σοκ μπορεί να επιμένουν in one norm και να εξαφανίζονται σταδιακά in another, έτσι ώστε οι δεσμευμένες ροπές του GARCH (1,1) μπορεί να εκρήγνυνται ακόμη και όταν η διαδικασία είναι αυστηρά στάσιμη ή εργοδική.

- Τα GARCH μοντέλα ορίζουν ουσιωδώς τη συμπεριφορά των τετραγώνων των δεδομένων. Στην περίπτωση αυτή, μερικές μεγάλες παρατηρήσεις μπορούν να επικρατήσουν στο δείγμα.

8.5.3 Το μοντέλο EGARCH

Τα ασύμμετρα μοντέλα παρέχουν μια εξήγηση για αυτό που καλείται *leverage effect* (μια απρόσμενη πτώση της τιμής αυξάνει τη μεταβλητότητα περισσότερο από μια απρόσμενη αύξηση της τιμής). Το EGARCH (p,q) μοντέλο (Εκθετικό GARCH (p,q)) εισήγαγε που ο Nelson, παρέχει μια πρώτη εξήγηση για το ότι το σ_t^2 εξαρτάται τόσο από το μέγεθος όσο και από το πρόσημο των υστερήσεων των καταλοίπων. Αυτό αποτελεί και το πρώτο παράδειγμα ασύμμετρου μοντέλου:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^{q} a_i [\phi z_{t-i} + \psi(|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|)]$$

με $\alpha_1 \equiv 1$, $E|z_t| = (2/\pi)^{1/2}$ δεδομένου ότι $z_t \sim NID\ (0,1)$, όπου οι παράμετροι ω, β_i, α_i δεν περιορίζονται να είναι μη-αρνητικοί. Με το μοντέλο αυτό ο Nelson χαλαρώνει τους προηγούμενους περιορισμούς.

Σε ένα EGARCH μοντέλο, το $\ln(\sigma_{t+1}^2)$ είναι ομοσκεδαστικό δεδομένου των σ_t^2, και η μερική συσχέτιση μεταξύ z_t και $\ln(\sigma_{t+1}^2)$ είναι σταθερή δεδομένου των σ_t^2.

Ο Nelson (1991) υιοθετεί ένα άλλο φυσικό τέχνασμα για να εξασφαλίσει ότι τα h_t παραμένουν μη-αρνητικά, φτιάχνοντας τα $\ln(h_t)$ γραμμικά σε μία συνάρτηση χρόνου και τις υστερήσεις των z_t τέτοιες ώστε:

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}.$$

Αυτό συμβαίνει για κάποια κατάλληλη συνάρτηση g:

$$\ln(h_t) = \alpha_t + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g(z_{t-k}), \qquad \beta \equiv 1,$$

όπου τα $\{\alpha_t\}_{t=-\infty,\infty}$ και $\{\beta_k\}_{k=1,\infty}$ είναι πραγματικές, μη-στοχαστικές, βαθμωτές ακολουθίες.

Προκειμένου να προσαρμόσουμε την ασύμμετρη σχέση μεταξύ των αποδόσεων των μετοχών και των μεταβολών της μεταβλητότητας, η αξία της $g(z_t)$ θα πρέπει να είναι συνάρτηση και του μεγέθους και του πρόσημου του z_t.

Μία επιλογή, η οποία σε συγκεκριμένες σημαντικές περιπτώσεις αποδεικνύεται ότι δίνει πολύ καλά συμπεριφερόμενες αποκλίσεις, είναι κάνοντας το $g(z_t)$ γραμμικό συνδυασμό των z_t και $|z_t|$:

$$g(z_t) = \theta z_t + \gamma\left[|z_t| - E(|z_t|)\right]$$

και επομένως το EGARCH(1,1) μοντέλο έχει την ακόλουθη συνάρτηση μεταβλητότητας:

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \gamma\left(\left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}\right| - E\left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}\right|\right) + \theta\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \beta\ln(h_{t-1}) \quad (3)$$

Από κατασκευής, η $\{g(z_t)\}_{t=-\infty,\infty}$ είναι μία τυχαία ακολουθία με μέσο μηδέν i.i.d. Τα δύο συνθετικά του $g(z_t)$ είναι το θz_t και το $\gamma[|z_t| - E(|z_t|)]$, το καθένα με μέσο μηδέν.

Αν η κατανομή του z_t είναι συμμετρική, τα δύο συνθετικά είναι ορθογώνια ακόμη και αν δεν είναι ανεξάρτητα. Για το διάστημα $0 < z_t < \infty$, η $g(z_t)$ είναι γραμμική στα z_t με κλίση θ+γ, ενώ για το διάστημα $-\infty < z_t \leq 0$, η $g(z_t)$ είναι γραμμική στα z_t με κλίση θ-γ. Επομένως η $g(z_t)$ επιτρέπει στη διαδικασία δεσμευμένης διακύμανσης $\{h_t\}$ να απαντά ασύμμετρα σε άνοδο και πτώση της τιμής της μετοχής.

Για να το δούμε αυτό καλύτερα, ο όρος $\gamma[|z_t| - E(|z_t|)]$ αντιπροσωπεύει ένα αποτέλεσμα μεγέθους (magnitude effect) για το πνεύμα των GARCH μοντέλων. Ας υποθέσουμε ότι για τη ροπή(moment) το $\gamma>0$ και $\theta = 0$. Τότε το $\ln(h_{t+1})$ είναι θετικό (αρνητικό) όταν το μέγεθος του z_t είναι μεγαλύτερο (μικρότερο) από την αναμενόμενη τιμή του. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\gamma = 0$ και $\theta<0$. Η δεσμευμένη διακύμανση είναι τώρα θετική (αρνητική) όταν οι αποδόσεις είναι αρνητικές (θετικές). Πιο συγκεκριμένα, η παράμετρος θ συλλαμβάνει το "leverage effect" (έχουμε "leverage effect" με $\theta<0$).

Το EGARCH (p,q) μοντέλο δηλώνεται ως εξής:

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p}\left\{a_j\left|\frac{u_{t-j}}{\sqrt{h_{t-j}}}\right| - a_j E\left|\frac{u_{t-j}}{\sqrt{h_{t-j}}}\right| + \delta_j\frac{u_{t-j}}{\sqrt{h_{t-j}}}\right\} + \sum_{i=1}^{q}(\beta_i \log(h_{t-i})).$$

Το EGARCH μοντέλο μπορεί να εκτιμηθεί με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας καθορίζοντας μία πυκνότητα για το z_t. Ο Nelson πρότεινε ως συνάρτηση πυκνότητας για την τυποποιημένη διαδικασία $z_t \equiv u_t / \sqrt{h_t}$ τη γενικευμένη κατανομή σφάλματος (Harvey (1981), Box και Tiao (1973)) κανονικοποιημένη ώστε να έχει μέσο μηδέν και μοναδιαία διακύμανση:

$$f(z_t) = \frac{\nu e^{-\frac{1}{2}\left|\frac{z_t}{\lambda}\right|^{\nu}}}{\lambda 2^{\frac{\nu+1}{\nu}} \Gamma(1/\nu)}$$

όπου το Γ(.) δηλώνει τη γάμμα συνάρτηση, λ είναι μια σταθερά που δίνεται από τον τύπο $\lambda \equiv \left(\frac{2^{-\frac{2}{\nu}}\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)}\right)^{\frac{1}{2}}$ και ν είναι μία θετική παράμετρος που ελέγχει το πάχος των ουρών.

Παρατηρούμε ότι για $\nu = 2$ η σταθερά λ ισούται με 1 και η γενικευμένη κατανομή σφάλματος μετατρέπεται στην τυπική κανονική πυκνότητα. Αν το $\nu < 2$ και $\nu > 2$ η κατανομή των z_t έχει πιο παχιές και πιο λεπτές ουρές από την κανονική κατανομή αντίστοιχα.

Συγκεκριμένα , για το EGARCH(1,1) ισχύει:

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{a_1 a_{t-1} + \gamma_1 |\alpha_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα ασύμμετρο αποτέλεσμα μεταξύ των αρνητικών και των θετικών αποδόσεων. Επιπλέον, για να αποφύγουμε την πιθανότητα μιας αρνητικής διακύμανσης, το μοντέλο είναι ένα AR(1) στα $\ln(\sigma_t^2)$ από ότι στα σ_t^2.

Ένας εναλλακτικός τρόπος απεικόνισης ενός EGARCH μοντέλου, τον οποίο συναντάμε συχνά στη βιβλιογραφία είναι να γράψουμε το EGARCH μοντέλο σαν μια AR(1) διαδικασία στα $\ln(\sigma_t^2)$ με i.i.d κατάλοιπα με μέσο μηδέν. Δηλαδή:

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha + \beta(\ln(\sigma_{t-1}^2)\text{-}\alpha) + g(\varepsilon_{t-1})$$

όπου

$$g(\varepsilon_t) = \theta\varepsilon_t + \gamma(|\varepsilon_t| - E\,[|\varepsilon_t|])$$

και αν $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ τότε $E[|\varepsilon_t|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Ένα πλεονέκτημα των EGARCH μοντέλων σε σχέση με τα βασικά GARCH μοντέλα είναι ότι η δεσμευμένη διακύμανση σ_t^2 είναι εγγυημένο ότι θα είναι θετική ανεξάρτητα από τις τιμές των συντελεστών και αυτό γιατί ο λογάριθμος του σ_t^2 είναι πάντα θετικός αριθμός σε αντίθεση με το σ_t^2 από μόνο του.

Η παραπάνω διατύπωση του EGARCH(p,q) έχει παραμέτρους (α_0, β_1, ..., β_q, α_1, ..., α_p, δ_1, ..., δ_p, ν, σ_0^2) και η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$l\,(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\delta}) = \left[\frac{\nu}{\lambda 2^{1+\frac{1}{\nu}}\Gamma(\frac{1}{\nu})}\right]^{T+1} \prod_{t=0}^{T}\left\{(\sigma_t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left|\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t\lambda}\right|^{\nu}\right)\right\}.$$

Κάτω από τη συνήθη υπόθεση η παρελθούσα διακύμανση σ_0^2 καθορίζεται προκαταβολικά, τότε το EGARCH(p,q) μοντέλο έχει ένα διάνυσμα παραμέτρων $\delta^* = \delta \setminus \{\sigma_0^2\}$ και η πιθανοφάνεια για ένα δείγμα T+1 παρατηρήσεων μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$l(\mathbf{y}\mid\boldsymbol{\delta}^*)=\left[\frac{\nu}{\lambda 2^{1+\frac{1}{\nu}}\Gamma(\frac{1}{\nu})}\right]^{T-p+1}\prod_{t=p}^{T}\left\{(\sigma_t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left|\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t\lambda}\right|^{\nu}\right)\right\}$$

8.6 Στασιμότητα

Ο Nelson (1991), στην τελευταία του κριτική για τα GARCH μοντέλα ανέφερε ότι είναι δύσκολο να εκτιμήσει κάποιος εάν τα σοκ στη διακύμανση 'επιμένουν' ή όχι. Εν τούτοις, σε ένα EGARCH (p,q) μοντέλο το ln (σ_t^2) είναι μια γραμμική διαδικασία, και η στασιμότητά του (ασθενής ή αυστηρή) και εργοδικότητα μπορούν να ελεγχθούν εύκολα. Εάν τα σοκ στο ln(h_t) εξαφανίζονται αρκετά γρήγορα και αν μετακινήσουμε τον ντετερμινιστικό (και πολύ πιθανό χρονικά μεταβαλλόμενο) όρο $\{\alpha_t\}$, τότε το {ln(h_t)} είναι αυστηρά στάσιμο.

Προκειμένου να εκφράσουμε απλά τις συνθήκες στασιμότητας, ξαναγράφουμε το EGARCH (p,q) μοντέλο ως εξής:

$$\left[1-\sum_{i=1}^{p}\beta_i L^i\right]\ln(\sigma_t^2)=\omega+\sum_{i=1}^{q}a_i L^i[\phi z_t+\psi(|z_t|-E|z_t|)]$$

$$\ln(\sigma_t^2)=\left[1-\sum_{i=1}^{p}\beta_i\right]^{-1}\omega+\left[1-\sum_{i=1}^{p}\beta_i L^i\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{q}a_i L^i\right]g(z_t)$$

$$\ln(\sigma_t^2)=\omega^*+\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i g(z_{t-i}).$$

Σε ένα EGARCH (p,q) μοντέλο το ln (σ_t^2) είναι μια γραμμική διαδικασία, και η στασιμότητά του (ασθενής ή αυστηρή) και εργοδικότητα μπορούν να ελεγχθούν εύκολα.

Δεδομένου ότι $\varphi \neq 0$ ή $\psi \neq 0$, τότε:

$$|\ln(\sigma_t^2) - \omega^*| < \infty \quad \text{a.s} \quad \text{όταν} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^2 < \infty$$

Το οποίο προκύπτει από την ανεξαρτησία και την πεπερασμένη διακύμανση των $g(z_t)$ καθώς και από τον Billingsley (1986, Θεώρημα 22.6).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\left|\ln\left(\frac{\sigma_t^2}{\exp(\omega^*)}\right)\right| < \infty \quad \text{a.s.}$$

$$\left|\frac{\sigma_t^2}{\exp(\omega^*)}\right| < \infty \quad \text{a.s.}$$

$\{\exp(-\omega^*)\sigma_t^2\}$, $\{\exp(-\omega^*/2)\varepsilon_t\}$, όπου $\varepsilon_t = z_t\sigma_t$, τα z_t είναι i.i.d, είναι εργοδικά και αυστηρά στάσιμα.

Για όλα τα t, E $[\ln(\sigma_t^2) - \omega^*] \equiv 0$ και η διακύμανση Var $[\ln(\sigma_t^2) - \omega^*] \equiv$ Var $(g(z_t))$ $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^2$. Αφού το Var $(g(z_t))$ είναι πεπερασμένο, και η κατανομή των $(\ln(\sigma_t^2) - \omega^*)$ είναι ανεξάρτητη των t, οι πρώτες δύο ροπές της $(\ln(\sigma_t^2) - \omega^*)$ είναι πεπερασμένες και χρονικά σταθερές, επομένως το $(\ln(\sigma_t^2) - \omega^*)$ είναι ασθενώς στάσιμο (covariance stationary) αν $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^2 < \infty$. Αν $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^2 = \infty$, τότε, $|\ln(\sigma_t^2) - \omega^*| = \infty$ σχεδόν σίγουρα.

8.7 Η καμπύλη επίδρασης των σοκ (The news impact curve)

Τα σοκ έχουν ασύμμετρες επιδράσεις στη μεταβλητότητα. Στα ασύμμετρα μοντέλα μεταβλητότητας, τα καλά και τα κακά νέα έχουν διαφορετική προβλεψιμότητα στη μελλοντική μεταβλητότητα. Η καμπύλη επίδρασης των σοκ χαρακτηρίζει την επίδραση των αποδόσεων παρελθόντων σοκ στην απόδοση της μεταβλητότητας που συνεπάγεται σε ένα μοντέλο μεταβλητότητας.

Κρατώντας σταθερή την πληροφορία η οποία χρονολογείται από το t-2 και νωρίτερα, εξετάζουμε τη σχέση που συνεπάγεται μεταξύ των ε_{t-1} και σ_t^2, με $\sigma_{t-i}^2 = \sigma^2$, i = 1, …, p. Η καμπύλη αυτή, με όλες τις υστερήσεις τών δεσμευμένων διακυμάνσεων αποτιμημένες στο επίπεδο της μη-δεσμευμένης διακύμανσης των αποδόσεων των μετοχών, καλείται καμπύλη επίδρασης των σοκ γιατί συνδέει αποδόσεις παρελθόντων σοκ με την τρέχουσα μεταβλητότητα. Αυτή η καμπύλη μετράει πως νέα πληροφορία μπορεί να ενσωματωθεί στις εκτιμήσεις της μεταβλητότητας.

Στην περίπτωση του EGARCH μοντέλου η καμπύλη έχει το ελάχιστό της στο $\varepsilon_{t-1} = 0$ και αυξάνεται εκθετικά και προς τις δύο κατευθύνσεις αλλά με διαφορετικές παραμέτρους.

Συγκεκριμένα, για το EGARCH (1,1) έχουμε:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta\ln(\sigma_{t-1}^2) + \varphi z_{t-1} + \psi(|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|)$$

όπου $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$. Η καμπύλη επίδρασης των σοκ είναι η:

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} A\exp\left[\dfrac{\phi+\psi}{\sigma}\varepsilon_{t-1}\right] & \text{για } \varepsilon_{t-1} > 0 \\[2ex] A\exp\left[\dfrac{\phi-\psi}{\sigma}\varepsilon_{t-1}\right] & \text{για } \varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases}$$

$$A \equiv \sigma^{2\beta}\exp\left[\omega - \psi\sqrt{2/\pi}\right]$$

$$\varphi < 0,\ \varphi + \psi > 0$$

- Το EGARCH μοντέλο επιτρέπει στα καλά και τα κακά νέα να έχουν διαφορετική επίδραση στη μεταβλητότητα σε αντίθεση με το μοντέλο GARCH.
- Το EGARCH μοντέλο επιτρέπει στα μεγάλα νέα να έχουν μεγαλύτερη επίδραση στη μεταβλητότητα απ'ότι στο GARCH μοντέλο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

9.1 Υπολογισμός του VaR

Στην ενότητα 8.3 του κεφαλαίου 8 μελετήσαμε πως υπολογίζεται η ιστορική μεταβλητότητα. Στη συγκεκριμένη εμπειρική ανάλυση θα υπολογίσουμε την αξία σε κίνδυνο (VaR) με χρονικό ορίζοντα μιας εβδομάδας με χρήση της ιστορικής μεταβλητότητας. Η εφαρμογή ολόκληρη πραγματοποιείται με χρήση του υπολογιστικού πακέτου Excel.

Αρχικά προσδιορίζουμε τους τίτλους οι οποίοι θα συνθέτουν το χαρτοφυλάκιό μας, καθώς και τις ποσότητες από κάθε τίτλο. Στην παρούσα ανάλυση, το χαρτοφυλάκιό μας αποτελείται από μετοχές τριών επιχειρήσεων υψηλής, μεσαίας και χαμηλής κεφαλαιοποίησης όπως ο ΟΤΕ, η MINOAN και η FRIGOGLASS αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, προκειμένου να υπολογίσουμε τη μεταβλητότητα, παίρνουμε τις τιμές κλεισίματος των τριών μετοχών (ιστορικές τιμές) για διάστημα ενός χρόνου, δηλαδή από τις 30 Οκτωβρίου του 2006 έως και τις 30 Οκτωβρίου 2007 και για ένα σύνολο 253 παρατηρήσεων.

Για τον υπολογισμό των ποσοστιαίων αποδόσεων χρησιμοποιείται ο εξής τύπος:

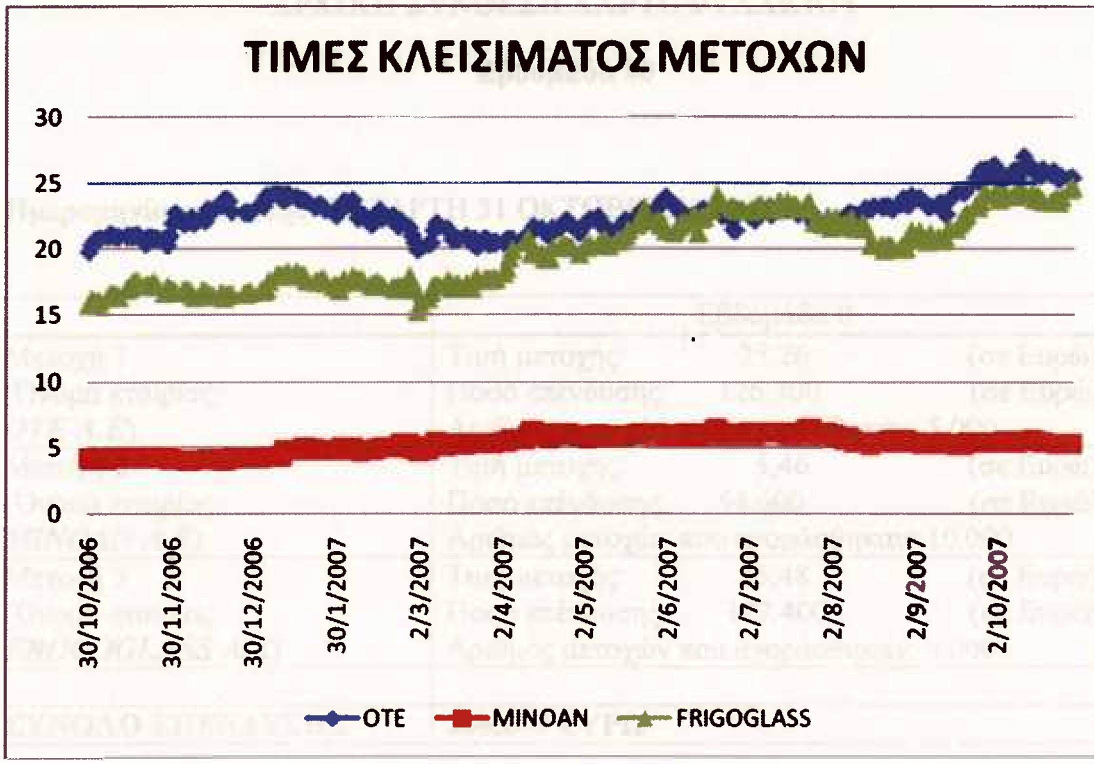
Ποσοστιαία απόδοση: $R_{tj} = \dfrac{P_{tj} - P_{t-1,j}}{P_{t-1,j}} \times 100$

Όπου P_t = η σημερινή τιμή κλεισίματος της μετοχής j, j = 1, 2, 3

P_{t-1} = η τιμή κλεισίματος της μετοχής j μια ημέρα πριν.

Έτσι, έχοντας συνολικά 253 τιμές κλεισίματος για κάθε μία από τις τρεις μετοχές, υπολογίζουμε 252 ποσοστιαίες αποδόσεις για κάθε μία μετοχή του χαρτοφυλακίου μας, λόγω του ότι χάνουμε 1 αρχική ποσοστιαία απόδοση .

Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζεται ο τρόπος που μεταβάλλονται χρονικά οι τιμές κλεισίματος των τριών μετοχών για το χρονικό διάστημα από 30/10/2006 έως 30/10/2007.



Γράφημα 1: Τιμές κλεισίματος μετοχών από 30/10/2006 έως 30/10/2007

Το επόμενο βήμα περιλαμβάνει τον υπολογισμό των διακυμάνσεων και των τυπικών αποκλίσεων των ποσοστιαίων αποδόσεων των τριών μετοχών καθώς και των συντελεστών συσχέτισής τους μέσω των γνωστών στατιστικών τύπων

Ο πίνακας που ακολουθεί, μας δίνει την αξία σε κίνδυνο όπως αυτή υπολογίστηκε με χρήση της ιστορικής μεταβλητότητας (Εβδομάδα #0). Στον επόμενο πίνακα υπολογίζουμε το VaR με ημερομηνία σύστασης του ίδιου χαρτοφυλακίου μια εβδομάδα μετά, δηλαδή στις 7 Νοεμβρίου 2007 (Εβδομάδα #1).

<u>Παρατήρηση:</u>

Για τον υπολογισμό της VaR απαιτείται η γνώση της κατανομής των μεταβολών των τιμών των αξιών (assets) από τις οποίες αποτελείται το χαρτοφυλάκιο. Η κατανομή των μεταβολών των τιμών, προσδιορίζει παράγοντες όπως η μεταβλητότητα (volatility) σ και τα q-εκατοστιαία σημεία, που αποτελούν σημαντικές παραμέτρους για τον υπολογισμό του VaR. Η συνήθης παραδοχή είναι να ληφθεί η κατανομή των μεταβολών των τιμών ως η κανονική (normal ή Gaussian) κατανομή.

ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Εβδομάδα #0

Ημερομηνία σύστασης: ΤΕΤΑΡΤΗ 31 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2007

	Εβδομάδα 0
Μετοχή 1 (Όνομα εταιρίας: ***OTE A.E***)	Τιμή μετοχής: 25,26 (σε Ευρώ) Ποσό επένδυσης: 126,300 (σε Ευρώ) Αριθμός μετοχών που αγοράσθηκαν: 5.000
Μετοχή 2 (Όνομα εταιρίας: ***MINOAN A.E***)	Τιμή μετοχής: 5,46 (σε Ευρώ) Ποσό επένδυσης: 54.600 (σε Ευρώ) Αριθμός μετοχών που αγοράσθηκαν: 10.000
Μετοχή 3 (Όνομα εταιρίας: ***FROGOGLASS A.E***)	Τιμή μετοχής: 25,48 (σε Ευρώ) Ποσό επένδυσης: 127.400 (σε Ευρώ) Αριθμός μετοχών που αγοράσθηκαν: 5.000
ΣΥΝΟΛΟ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ	**308.200 ΕΥΡΩ**

Δεδομένα

Τι δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των σ, ρ:

	Από πότε μέχρι πότε	Αριθμός τιμών	Πηγή από την οποία αντλήθηκαν τα δεδομένα
Μετοχή 1 (Όνομα εταιρίας: ***OTE A.E***)	30/10/06-30/10/07	253	www.naftemporiki.gr
Μετοχή 2 (Όνομα εταιρίας: ***MINOAN A.E***)	30/10/06-30/10/07	253	www.naftemporiki.grr
Μετοχή 3 (Όνομα εταιρίας: ***FRIGOGLASS A.E***)	30/10/06-30/10/07	253	www.naftemporiki.gr

Υπολογισμός παραμέτρων

	Μετοχή 1	Μετοχή 2	Μετοχή 3
σ	σ_1=0,016519	σ_2=0,010991	σ_3=0,013402
Μετοχή 1	ρ_{11}=1	ρ_{12}=0,605324	ρ_{13}=0,051722
Μετοχή 2		ρ_{22}=1	ρ_{23}=0,338308
Μετοχή 3			ρ_{33}=1

Υποθέτουμε πως ο χρόνος διακράτησης του χαρτοφυλακίου είναι 5 ημέρες (δηλαδή μία εβδομάδα). Τόσο δηλαδή θα κρατήσουμε το χαρτοφυλάκιο προτού αλλάξουμε τη σύνθεσή του.

Α) Η μεταβλητότητα σ_5 που αναμένεται στο χρονικό ορίζοντα των 5 ημερών υπολογίζεται από την ημερήσια μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου σ ως εξής:

$$\sigma_5 = \sigma\sqrt{5}$$

Β) σ(χαρτοφυλακίου) = $\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2+2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3+2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3}$

(σ_1): είναι η μεταβλητότητα της συνολικής θέσης του χαρτοφυλακίου σε μετοχές του ΟΤΕ.

(σ_2): είναι η μεταβλητότητα της συνολικής θέσης του χαρτοφυλακίου σε μετοχές της MINOAN.

(σ_3): είναι η μεταβλητότητα της συνολικής θέσης του χαρτοφυλακίου σε μετοχές της FRIGOGLASS.

Υπολογισμός σ(χαρτοφυλακίου)

σ(χαρτοφυλακίου) = 7.143,461

Υπολογισμός Value-at-Risk (VaR) του χαρτοφυλακίου

VaR = 2.33 × σ(χαρτοφυλακίου) = 2,33 × 7.143,461 = 16.644,26413 ευρώ

ΕΒΔΟΜΑΔΑ #1

ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΤΗΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗ ΕΒΔΟΜΑΔΑ: 308.200 (ΕΥΡΩ)

VaR ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΤΗΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗ ΕΒΔΟΜΑΔΑ: 16.644,26413 (ΕΥΡΩ)

ΣΗΜΕΡΙΝΗ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

	Εβδομάδα #1	Αξία
Μετοχή 1 (Όνομα εταιρίας: ***OTE A.E***)	Τιμή μετοχής (σήμερα): 25,12 (σε Ευρώ) Αριθμός μετοχών που υπάρχουν ήδη στο χαρτοφυλάκιο: 5.000	(Τιμή μετοχής × αριθμός μετοχών) 125.600
Μετοχή 2 (Όνομα εταιρίας: ***MINOAN A.E***)	Τιμή μετοχής (σήμερα): 5,14 (σε Ευρώ) Αριθμός μετοχών που υπάρχουν ήδη στο χαρτοφυλάκιο: 10.000	(Τιμή μετοχής × αριθμός μετοχών) 51.400
Μετοχή 3 (Όνομα εταιρίας: ***FRIGOGLASS A.E***)	Τιμή μετοχής (σήμερα): 24,52 (σε Ευρώ) Αριθμός μετοχών που υπάρχουν ήδη στο χαρτοφυλάκιο: 5.000	(Τιμή μετοχής × αριθμός μετοχών) 122.600
ΣΥΝΟΛΟ -ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ		(Άθροισμα των ποσών της στήλης αυτής) **299.600**
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ (σχετικά με την προηγούμενη εβδομάδα)		(Αξία του χαρτοφυλακίου σήμερα) – (Αξία του χαρτοφυλακίου την προηγούμενη βδομάδα) = -8.600

Μειώθηκε η αξία του χαρτοφυλακίου σχετικά με την προηγούμενη εβδομάδα αλλά η μείωση της αξίας ΔΕΝ ήταν μεγαλύτερη από την τιμή VaR της προηγούμενης εβδομάδας

ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

V_1: Αξία του χαρτοφυλακίου σήμερα (εβδομάδα #1)
V_0: Αξία του χαρτοφυλακίου την προηγούμενη εβδομάδα (εβδομάδα #0)

$$R_1 = \frac{V_1}{V_0} - 1 \Rightarrow R_1 = \frac{299.600}{308.200} - 1 = -0,027903958$$

ΑΠΟΔΟΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

$$R2 = \ln \frac{V_1}{V_0} = \ln \left[\frac{299.600}{308.200}\right] = -0,028300671$$

Υποθέτουμε πως ο χρόνος διακράτησης του χαρτοφυλακίου είναι 5 ημέρες (δηλαδή μια βδομάδα). Τόσο δηλαδή θα κρατήσουμε το χαρτοφυλάκιο πριν τυχόν αλλάξουμε τη σύνθεσή του.

$\sigma_i \rightarrow \sigma_i \times$ (την αξία της επένδυσης στην μετοχή της εταιρίας i) $\times \sqrt{5}$

	Μετοχή 1	Μετοχή 2	Μετοχή 3
σ	σ_1=0,016519	σ_2=0,010991	σ_3=0,013402
Αξία Επένδυσης (με σημερινές τιμές μετοχών)	2.074,7864	564,9374	1643,0852
$\sigma_i \rightarrow \sigma_i \times$ (αξία της επένδυσης στην μετοχή της εταιρίας i) $\times \sqrt{5}$	4.639,416	1.263,238	3.674,05

Υπολογισμός σ(χαρτοφυλακίου)

$$\sigma(\text{χαρτοφυλακίου}) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3}$$

$$\boxed{\sigma(\text{χαρτοφυλακίου}) = 6972{,}617}$$

Υπολογισμός Value-at-Risk (VaR) του χαρτοφυλακίου

$$\boxed{VaR = 2.33 \times \sigma(\text{χαρτοφυλακίου}) = 2{,}33 \times 6972{,}617 = 16.246{,}19761 \text{ ευρώ}}$$

9.2 Υπολογισμός βέλτιστου χαρτοφυλακίου

Η σπουδαιότητα του κινδύνου και της αβεβαιότητας στη μοντέρνα οικονομική θεωρία και η εμπειρική απόδειξη των χαρακτηριστικών των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων που περιγράψαμε αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο, κατέστησαν αναγκαία την ανάπτυξη νέων τεχνικών οικονομετρικών χρονολογικών σειρών που να επιτρέπουν τη μοντελοποίηση χρονικά μεταβαλλόμενων διακυμάνσεων και συνδιακυμάνσεων.

Αφού ασχοληθήκαμε και αναλύσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια τα τρία πιο δημοφιλή μέτρα κινδύνου (το σ, το VaR και το CVaR) και αφού μελετήσαμε και τα μοντέλα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (με μεγαλύτερη έμφαση στο μοντέλο EGARCH) συνεχίζουμε με μια εφαρμογή.

Στην παρακάτω εφαρμογή ψάχνουμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη στάθμιση για ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από δύο μετοχές η οποία θα μου δώσει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο για συγκεκριμένο επίπεδο απόδοσης ελαχιστοποιώντας το μέτρο κινδύνου το οποίο θα χρησιμοποιούμε κάθε φορά (σ, VaR ή CVaR). Για τη διακύμανση χρησιμοποιούμε ένα EGARCH(1,1) μοντέλο. Όλο το εμπειρικό μέρος πραγματοποιείται με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Matlab.

9.2.1 Περιγραφή των δεδομένων

Τα δεδομένα τα οποία χρησιμοποιούνται στην εφαρμογή αυτή (πηγή δεδομένων: Datastream) καλύπτουν τις εβδομαδιαίες τιμές κλεισίματος των μετοχών του ΟΤΕ και της ALPHA BANK. Τα δεδομένα καλύπτουν μια περίοδο από τις 19/03/1998 έως τις 20/09/2007 για ένα σύνολο 497 παρατηρήσεων. Η εβδομαδιαία απόδοση κάθε μετοχής ισούται με $r_t = \ln (P_t / P_{t-1})$ όπου το P_t είναι η τιμή της μετοχής στο τέλος της εβδομάδας t. Εμείς θα δουλέψουμε με τις υπερβάλλουσες λογαριθμικές αποδόσεις των δύο μετοχών (excess log-returns) οι οποίες εκτείνονται από τις 26/03/1998 έως τις 13/09/2007 (495 παρατηρήσεις).

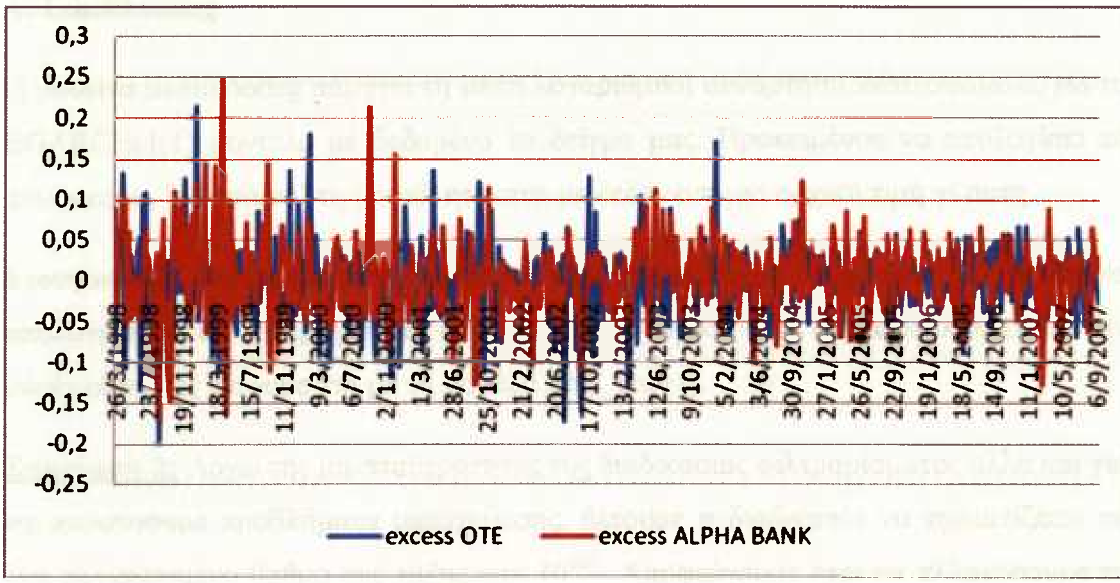
Από την ίδια πηγή έχουμε πάρει και τα ασφαλή επιτόκια (σε ποσοστό επί τοις εκατό) για την ίδια χρονική περίοδο ενός ομολόγου του δημοσίου με λήξη μιας εβδομάδας.

9.2.2 Υπολογισμός υπερβάλλουσων λογαριθμικών αποδόσεων

Όπως αναφέραμε παραπάνω, τα επιτόκια του κρατικού ομολόγου είναι εκφρασμένα σε ποσοστά (επί τοις εκατό) και αναφέρονται όλα στο χρόνο (ετήσια επιτόκια) ώστε να είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους. Επομένως για να τα μετατρέψουμε από ποσοστά σε νούμερα τα πολλαπλασιάζουμε με το 100. Μετά παίρνουμε το προεξοφλητικό επιτόκιο το οποίο ισούται με (1+r) και το υψώνουμε στην $\frac{1}{52}$ (1 έτος έχει 52 εβδομάδες) αφού εμείς θέλουμε το ασφαλές προεξοφλητικό επιτόκιο μιας εβδομάδας. Επομένως, η υπερβάλλουσα λογαριθμική απόδοση για κάθε μία μετοχή υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Excess log-return} = \ln \frac{P_{t+1}}{P_t} - \ln (1+r)^{\frac{1}{52}}$$

<u>Σημείωση 1:</u> Πολλαπλασιάζω τις υπερβάλλουσες λογαριθμικές αποδόσεις με 100, τις κάνω δηλαδή ποσοστά, προκειμένου να αυξήσω τη διακύμανση (κατά 100*100) για να μη δημιουργούν αριθμητικά προβλήματα οι κοντινές στο μηδέν τιμές στη ρουτίνα της πιθανοφάνειας (όταν υπολογίζονται οι λογάριθμοι της μεταβλητότητας).



Γράφημα 2: Εβδομαδιαίες υπερβάλλουσες λογαριθμικές αποδόσεις των μετοχών του ΟΤΕ και της ALPHA BANK για τη χρονική περίοδο 26/03/1998 έως 13/09/2007.

9.2.3 Περιγραφή του αλγόριθμου

Για την υλοποίηση του αλγορίθμου χρησιμοποιώ πέντε ρουτίνες: τη firstStep, τη secondStep, την portfolioChoiceFun, τη likelihoodeg και τη filterANDpredict. Η secondStep είναι η βασική ρουτίνα (main routine), αυτή καλεί όλες τις υπόλοιπες (υπορουτίνες-subroutines). Αρχικά καλεί την portfolioChoiceFun η οποία με τη σειρά της καλεί τη firstStep. Η τελευταία καλεί τελικώς τις likelihoodeg και filterANDpredict.

secondStep → portfolioChoiceFun → firstStep → likelihoodeg

secondStep → portfolioChoiceFun → firstStep → filterANDpredict

Για κάθε μία από τις ρουτίνες έχουμε πιο αναλυτικά τα εξής:

A. Likelihoodeg

Η ρουτίνα likelihoodeg παράγει τη μέση λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας για το EGARCH(1,1) μοντέλο με δεδομένο το δείγμα μας. Προκειμένου να υπολογίσει τη συνάρτηση, 'φιλτράρει' τη μεταβλητότητα με δεδομένη μια αρχική τιμή γι'αυτή.

Εισαγωγικά δεδομένα: το διάνυσμα των παραμέτρων σύμφωνα με το οποίο υπολογίζουμε τη συνάρτηση, το δείγμα r και η αρχική τιμή της μεταβλητότητας την οποία συνήθως θέτουμε ίση με τη μονάδα (init_vol=1).

Σημείωση 2: Λόγω της μη-σταθερότητας της διαδικασίας φιλτραρίσματος αλλά και για να αποφύγουμε προβλήματα υπερχείλισης, θέτουμε η διαδικασία να τερματίζεται σε ένα συγκεκριμένο βαθμό της τάξης του 10^{20}. Αποφεύγουμε έτσι να αλλοιώσουμε τη διαδικασία της μεγιστοποίησης.

B. filterANDpredict

Με δεδομένες τις εκτιμημένες παραμέτρους της διαδικασίας EGARCH(1,1), η ρουτίνα αυτή φιλτράρει τη μεταβλητότητα στο δείγμα (in the sample) με χρήση του ίδιου αλγορίθμου ο οποίος χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανοφάνειας και υπολογίζει επίσης την πρώτη εκτός δείγματος μεταβλητότητα (out of the sample volatility).

Εισαγωγικά δεδομένα: Το διάνυσμα των εκτιμημένων παραμέτρων (par), το δείγμα μας r και η αρχική τιμή για το φιλτράρισμα της μεταβλητότητας.

Αποτελέσματα της εξόδου είναι οι φιλτραρισμένες, τυποποιημένες innovations (z_filtered), η φιλτραρισμένη μεταβλητότητα (h_filtered) και η πρόβλεψη της μεταβλητότητας για ένα βήμα μπροστά (h_predicted). Χρησιμοποιείται για να μας δώσει τις εκτιμήσεις της μεταβλητότητας προκειμένου να υπολογίσουμε τα μέτρα κινδύνου, μετά από την εκτίμηση των παραμέτρων.

Γ. firstStep

Η συνάρτηση αυτή εκτελεί βαθμιαία την εκτίμηση του μοντέλου EGARCH(1,1) με δεδομένο το δείγμα μου. Μεγιστοποιεί ως προς τις παραμέτρους τη συνάρτηση πιθανοφάνειας που ορίζεται στη likelihoodeg ρουτίνα και περιορίζει ανάλογα το διάστημα των παραμέτρων: περιορίζει το β στο διάστημα (-1,1) λόγω της στασιμότητας και όλες τις άλλες παραμέτρους στο διάστημα (-5,5) για να αντιμετωπιστούν έτσι προβλήματα υπερχείλισης. Μετά, με δεδομένες τις εκτιμημένες παραμέτρους καλεί τη ρουτίνα filterANDpredict.

Εισαγωγικά δεδομένα: οι αρχικές τιμές των παραμέτρων (init_param_values) προκειμένου να ξεκινήσει η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Χωρίς να έχουμε απώλεια πληροφορίας, οι αρχικές τιμές των παραμέτρων μπορούν να τεθούν ίσες με [0 0 0 0], το δείγμα μας είναι το r και την αρχική τιμή για τη μεταβλητότητα τη θέτουμε όπως έχουμε προαναφέρει ίση με 1 (init_vol=1).

Δ. PortfolioChoiceFun

Η ρουτίνα αυτή παίρνει το δείγμα των υπερβάλλουσων λογαριθμικών αποδόσεων των δύο μετοχών καθώς και τη στάθμιση λ (weight) και υπολογίζει την απόδοση του σχετικού χαρτοφυλακίου. Μετά υπολογίζει το επιθυμητό κάθε φορά μέτρο κινδύνου (μεταβλητότητα σ, Var ή CVar). Αποτελεί επομένως την αντικειμενική συνάρτηση για την επιλογή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου.

Εισαγωγικά δεδομένα: Η στάθμιση λ του χαρτοφυλακίου, οι αποδόσεις των δύο μετοχών (r_first(OTE), r_second(ALPHA_BANK)), ένας πρώτος δείκτης iflag1 και ένας δεύτερος iflag2. Όταν iflag1=1 τα μέτρα κινδύνου υπολογίζονται στο δείγμα παρατήρηση προς παρατήρηση. Δημιουργείται επομένως ένα διάνυσμα ιδίου μήκους με αυτό του δείγματος του οποίου υπολογίζεται η Ευκλείδεια νόρμα. Όταν το iflag1=2 τότε υπολογίζεται το μέτρο κινδύνου ένα βήμα μπροστά εκτός του δείγματος.

Για το δεύτερο δείκτη iflag2 έχουμε: όταν iflag2=1 τότε το επιθυμητό μέτρο κινδύνου είναι η δεσμευμένη διακύμανση, για iflag2=2 τότε το μέτρο κινδύνου το οποίο επιθυμούμε να υπολογίσουμε είναι η αξία σε κίνδυνο (VaR) ενώ όταν iflag2=3 τότε το επιθυμητό μέτρο κινδύνου είναι το CVaR. Οι αρχικές τιμές των παραμέτρων (init_param_values) χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση, η αρχική μεταβλητότητα (init_vol) χρησιμοποιείται στο φιλτράρισμα και το επίπεδο εμπιστοσύνης (alpha) χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του VaR και του CVaR.

r = lambda*r_first + (1-lambda)*r_second

__Σημείωση 3:__ Το lambda θα πρέπει να ανήκει στο διάστημα (0,1). Για lambda αρνητικό, ίσο με το μηδέν ή θετικό θα μας βγαίνει μια προειδοποίηση ότι η στάθμιση είναι εκτός των αποδεκτών ορίων.

E. SecondStep

Η συνάρτηση αυτή επιλέγει τα βέλτιστα βάρη (weights) (που θα μου δώσουν το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο) ελαχιστοποιώντας ως προς τα βάρη τη συνάρτηση η οποία υπολογίζεται από την PorfolioChoiceFun με δεδομένη την ελάχιστη αναμενόμενη απόδοση. Η ελαχιστοποίηση περιορίζεται από τη σχέση:

mean(first_stock)*weight + mean(second_stock)(1-weight) ≥ min_ret

Καλώ επομένως τη ρουτίνα SecondStep με τα εξής ορίσματα: minret = 0.0009. Πρόκειται για την ελάχιστη απόδοση που θέλουμε να έχει ο χαρτοφυλάκιό μας επομένως βάζουμε αυθαίρετα μια απόδοση που εμείς επιθυμούμε. Η συγκεκριμένη τιμή αντιστοιχεί σε λίγο μεγαλύτερη τιμή της τελευταίας λογαριθμικής ακίνδυνης εβδομαδιαίας απόδοσης και προφανώς είναι το κάτω όριο απόδοσης για τον επενδυτή που θα αναλάβει χαρτοφυλάκιο τα οποίο θα ενέχει κίνδυνο (κινδυνώδες χαρτοφυλάκιο).

Η αρχική τιμή του λ τίθεται αυθαίρετα ίση με 0.5, δηλαδή lambda_init = 0.5. Αυθαίρετα θέτουμε επίσης τις αρχικές τιμές των παραμέτρων, την αρχική τιμή της μεταβλητότητας και το επίπεδο εμπιστοσύνης α. Συγκεκριμένα έχουμε: init_param_values = [0.1,0.1,0.1,0.1], init_vol = 1 και alpha = 0.025.

Τα αποτελέσματα όσο αφορά το βέλτιστο λ (lambda(*)) έχουν ως εξής:

(i) iflag1=1, iflag2=1, lambda(*)=0.5551

(ii) iflag1=1, iflag2=2, lambda(*)=0.5627

(iii) iflag1=1, iflag2=3, lambda(*)=0.5610

Τα τρία αυτά αποτελέσματα μεταφράζονται ως εξής:

Στην περίπτωση (i), το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο το οποίο μου ελαχιστοποιεί τη μεταβλητότητα σ αποτελείται από 0,5551 της μετοχής του ΟΤΕ και από (1-0,5551) = 0,4449 της μετοχής της ALPHA BANK.

Στην περίπτωση (ii), το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο το οποίο μου ελαχιστοποιεί το μέτρο κινδύνου VaR αποτελείται από 0,5627 της μετοχής του ΟΤΕ και από (1-0,5627) = 0,4373 της μετοχής της ALPHA BANK.

Τέλος, στην περίπτωση (iii), το βέλτιστο για τα χρηματοοικονομικά δεδομένα. χαρτοφυλάκιο το οποίο μου ελαχιστοποιεί το συνεπές μέτρο κινδύνου CVaR αποτελείται από 0,5610 της μετοχής του ΟΤΕ και από (1-0,5610) = 0,439 της μετοχής της ALPHA BANK.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Μελλοντική Έρευνα

Στην εργασία αυτή, τόσο στη διεξαγωγή του VaR, όσο και στον υπολογισμό του βέλτιστου χαρτοφυλακίου στηριχτήκαμε στην υπόθεση πως οι αποδόσεις των χρηματοοικονομικών μας προϊόντων είναι κανονικά κατανεμημένες. Αυτή όμως η υπόθεση στην πλειοψηφία των περιπτώσεων δεν ισχύει. Οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων τείνουν να είναι λεπτόκυρτες (πιο υψηλές κεντρικές τιμές και παχιές «ουρές» λόγω των συχνότερων ακραίων αλλαγών σε σχέση με την κανονική κατανομή). Επίσης οι αποδόσεις τείνουν να εκθέσουν μη-κανονικές και μη-δεσμευμένες δειγματικές κατανομές, με μια μορφή ασυμμετρίας ή πιο σωστά υπερβολικής κύρτωσης.

Η υπόθεση της δεσμευμένης κανονικότητας συλλαμβάνει κάποιο βαθμό της υπερβολικής κύρτωσης, αλλά τυπικά λιγότερο από αυτόν που χρειάζεται για να εξηγηθεί πλήρως η ιδιότητα των παχιών ουρών των δεδομένων. Επομένως η έρευνα που έγινε εδώ θα μπορούσε να επεκταθεί με χρήση υποδειγμάτων τα οποία να αλλάζουν την δεσμευμένη κανονική κατανομή (όπως η αντικατάσταση της κανονικής κατανομής με την student-t). Αυτό οδηγεί στη μοντελοποίηση των αποδόσεων ως i.i.d. απεικονίσεις προερχόμενες από κατανομές παχιών ουρών.

Επιπλέον, θα μπορούσαμε να μελετήσουμε και τα Stochastic Volatility υποδείγματα. Τα υποδείγματα αυτά υποθέτουν όπως και τα μοντέλα GARCH ότι η μεταβλητότητα είναι μια αυτοπαλινδρούμενη διαδικασία, παρόλα αυτά τώρα δεν είναι παρατηρούμενη και δεν εξαρτάται από τα κατάλοιπα των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων. Η πιο μεγάλη όμως διαφορά είναι ότι εισάγεται και δεύτερη στοχαστική διαδικασία στο υπόδειγμα, αυτή τη φορά στην εξίσωση της μεταβλητότητας. Έτσι από εκεί που μελετούσαμε τη μεταβλητότητα στα GARCH υποδείγματα ως ένα ντετερμινιστικό μέγεθος, με τη χρήση των Stochastic Volatility υποδειγμάτων, η μεταβλητότητα γίνεται στοχαστικό μέγεθος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

[1] **Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. Heath D. (1997):** "Thinking Coherently", *Risk,* Vol. 10, November, pp. 68-71.

[2] **Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. Heath D. (1999):** "Coherent Measures of risk", *Mathematical Finance,* Vol. 9, pp. 203-228.

[3] **Black, F. (1976):** "Studies of Stock Market Volatility Changes", *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section,* pp. 177-181.

[4] **Bollerslev T. (1986):** "Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity", *Journal of Econometrics,* Vol. 31, pp 307-327.

[5] **Bollerslev T. (1987):** "A conditionally heteroscedastic time series model for speculative prices and rates of returns", *The Review of Economics and Statistics,* January 1987.

[6] **Bollerslev T. and Baillie R. (1989):** "The Message in Daily Exchange Rates: A Conditional – Variance Tale", *Journal of Business and Economic Statistics,* Vol. 7, No 3, pp. 297-305.

[7] **Bollerslev T., Chou R. and Kroner K. (1992):** "ARCH modeling in Finance: a review of the theory and empirical evidence", *Journal of Econometrics,* Vol. 52, pp. 5-59.

[8] **Bollerslev T. and Wooldridge J. (1992):** "Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time varying covariances", *Econometric Reviews,* Vol. 11, pp. 143-179.

[9] **Brooks C., (2002):** "Introductory Econometrics for Finance", Cambridge UK: *Cambridge University Press.*

[10] **Brooks C. and Persand G. (2003):** "Volatility Forecasting for Risk Management", *Journal of Forecasting,* Vol. 22, pp. 1-22.

[11] **Campbell, John Y. and Hentschel Ludger, (1990):** "No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns", *Unpublished manuscript (Princeton University, Princeton, NJ).*

[12] **Christie, A. A. (1982):** "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage and Interest Rate Effects", *Journal of Financial Economics,* Vol. 10, pp. 407-432.

[13] **Credit Suisse First Boston (2004):** "The Quantitative Credit Strategist", Technical document.

[14] **Danielson, J. Jorgensen, B. N. Mandira, S. Samorodnitsky, G. de Vries, C. G., (2005):** "Subadditivity Re-examined: the Case for Value-at-Risk.", *London School of Economics financial markets group discussion paper series, ISSU 549.*

[15] **Danielsson J., Casper G. de Vries and Jorgensen B. (1998):** "The Value of Value at Risk", January 1997, Working Paper.

[16] **Danielsson J., Jorgensen B., Sarma M., and Casper G. de Vries(2005):** "Comparing risk measures", Working Paper.

[17] **Duffie, D. and Pan, J. (1997):** "An Overview of Value-at-Risk", *Journal of Derivatives,* Vol: 4, pp. 7-49.

[18] **Engle R.F. (1982):** "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation", *Econometrica,* Vol. 50, No 4, pp. 987-1007.

[19] **Engle R.F. (1983):** "Estimates of the variance of U.S inflation based upon the ARCH model", *Journal of Money, Credit and Banking,* Vol. 15, pp. 286-301.

[20] **Engle R.F. (1995):** "ARCH Selected Readings – Advanced Texts in Econometrics", *Oxford University Press.*

[21] **Engle R.F. (2001):** "The use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics", *Journal of Economic Perspectives,* Vol. 15, Number 4, Fall 2001, pp. 157-168.

[22] **Engle R.F., (2004):** Nobel Lecture. "Risk and Volatility: Econometrics Models and Financial Practice", *American Economic Review,* Vol. 94, pp. 405-420.

[23] **Engle R.F. and Bollerslev T. (1986):** "Modelling the persistence of the conditional variances", *Econometric Reviews,* Vol. 5, pp. 1-87.

[24] **Engle R.F. and Manganelli S. (1999):** "CA Viar: Conditional Value at Risk by Quantile Regression", *National Bureau of Economic Research,* Working Paper No W7341.

[25] **Engle R. and Ng, V. K. (1993):** "Measuring and Testing the impact of News on Volatility", *Journal of Finance,* Vol. 48, pp. 1022-1082.

[26] **Fama, E.F. (1965):** "The Behavior of Stock Market Prices", Journal of Business, Vol. 38, pp. 34-105.

[27] **Figlewski S., Wang X., (November 2000):** "Is the 'Leverage Effect' a Leverage Effect?", *City University of Hong Kong, Working Paper Series.* (www.ssrn.com/abstract =256109).

[28] **French, K. R. and Roll, R. (1986):** "Stock Return Variances: The Arrival of Information and Reaction of Traders", *Journal of Financial Economics,* Vol. 17, pp. 5-26.

[29] **French, K. R., Schwert, G. W. and Stambaugh, R. F. (1987):** "Expected Stock Returns and Volatility", *Journal of Financial Economics,* Vol. 19, pp. 3-30.

[30] **Giot P. and Laurent S. (2003):** "Value at Risk for long and short trading positions", *Journal of Applied Econometrics,* Vol. 18, pp. 641-664.

[31] **Glosten L., Jagannathan R. and Runkle D. (1991):** "Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks", *Mimeo, Northwestern University.*

[32] **Gourieroux C., (1997):** "ARCH Models and Financial Applications", *Springer Series in Statistics.*

[33] **Gourieroux C., Jasiak J., (2001):** "Financial Econometrics", Princeton NJ: *Princeton University Press.*

[34] **Hamilton J., (1994):** "Time Series Analysis", Princeton: *Princeton University Press.*

[35] **Hull J., (2003):** "Options. Futures and Other Derivatives", *Prentice Hall Finance Series.*

[36] **Jacky C.So (1987):** "The Distribution of Foreign Exchange Price Changes: Trading Day Effects and Risk Measurement – A comment", *The Journal of Finance,* Vol. 42, No1, pp. 181-188.

[37] **Jorion P., (2001):** "Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk", Chicago: McGraw-Hill-2nd ed.

[38] **Kaplanski G., Kroll Y., (2000):** "VaR Risk Measures versus Traditional Risk Measures: an Analysis and Survey", *Journal of Risk,* **4**(3).

[39] **Kupiec, Paul H., (1990):** "Initial margin requirements and stock returns volatility: Another look", Journal *of Financial Services Research,* Vol. 3, pp. 287-301

[40] **Kusuoka, Shigeo (2001):** "On law invariant coherent risk measures". *Advances in Mathematical Economics,* Vol. 3, pp. 83-95.

[41] **Larsen, N., Mausser h., and S. Uryasev (2002):** "Algorithms for Optimization of Value-at-Risk", P. Pardalos and V.K Tsitsiringos, (Eds.) *Financial Engineering, e-commerce and Supply Chain, Kluwer Academic Publishers,* pp. 129-157.

[42] **Levy, H. (1998):** "Stochastic Dominance", *Kluwer Academic Publisher,* Boston-Pordrecht-London.

[43] **Mandelbrot B. (1963):** "The variation of certain speculative prices", *Journal of Business,* Vol. 36, pp. 394-419.

[44] **McNeil, Alexander, Rudiger Frey & Paul Embrechts (2005):** "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", *Princeton University Press.*

[45] **Nelson, D. B. (1990):** "Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model", *Econometric Theory*, Vol. 6, pp. 318-334.

[46] **Nelson, D. B. (1991):** "Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica,* Vol. 59, pp. 347-370.

[47] **Nelson D. and Cao C. (1992):** "Inequality constraints in the univariate GARCH model", *Journal of Business & Economic Statistics,* Vol. 10, pp. 229-235.

[48] **Pagan A.R. and Schwert G.W. (1990):** "Alternative models for conditional stock volatility", *Journal of Econometrics,* Vol. 45, pp. 267-290.

[49] **Pantula S.G. (1986):** "Modelling the persistence of conditional variances: comment", *Econometric Reviews,* Vol. 5, pp. 79-97.

[50] **Pflug, G., (2001):** "Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk, in Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications" (S. Uryasev ed.), Kluwer Academic Publishers.

[51] **Rockafellar R.T. and S. Uryasev (2001):** "Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions", Research Report 2001-2005, ISE Dept., *University of Florida,* April 2001.

[52] **Schwert, G.W. (1989):** "Why does Stock Market Volatility Change Over Time?", *Journal of Finance,* Vol. 44, pp. 1115-1153.

[53] **Stambaugh, F.** (1996): "Risk and Value-at-Risk", *European Management Journal,* Vol. 14, No. 6, pp. 612-621.

[54] **Taylor S. (1986):** "Modelling Financial Time Series", John Wiley, Chichester, UK.

[55] **Uryasev, S. and P. Pardalos, Eds.(2001):** "Stochastic Optimization: Algorithms and Applications", Kluwer Academic Publishers (proceedings on the conference on Stochastic Optimization, Gainesville, FL, 2000).

[56] **Vrontos I., Dellaportas P. and Politis D. (2000):** "Full Bayesian Inference for GARCH and EGARCH models", *Journal of Business and Economic Statistics,* Vol. 18, No 2, pp. 187-197.

[57] **Weber, Stefan (2003):** "Distribution-invariant risk-measures, information, and dynamic consistency", *To appear in Mathematical Finance.*

[58] **White H. (1982):** "Maximum likelihood estimation of misspecified models", *Econometrica,* Vol. 50, pp. 1-25.

[59] **Yamai, Y. and T. Yoshiba (2001):** "On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with expected Shortfall", *Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan,* IMES discussion Paper 2001-E-4, 2001."

ΠΗΓΕΣ ΣΤΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ

- www.hba.gr (ΕΝΩΣΗ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΤΡΑΠΕΖΩΝ)
- www.ivolatility.com
- www.mathworks.com
- www.google.com

Δωρεά