OIKONOMIKO ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
εισ. 71465
Αρ. 332.63228
ταξ. ΚΑΚ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ OPTIONS ΜΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΚΑΚΑΛΕΤΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΟΣ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ
0 000000 472418

Διατριβή υποβληθείσα προς μερική εκπλήρωση
των απαραίτητων προϋποθέσεων
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος

Αθήνα, 25 – 11 – 2002

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ... ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ... ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
εισ. 71465
Αρ. 332.632280711
ταξ. ΚΑΚ

Εγκρίνουμε τη Διατριβή του **Κακαλέτρη Κυριάκου**

25 – 11 – 2002

Πέτρος Δελλαπόρτας
(Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών)

Ιωάννης Κατσουλάκος
(Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών)

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αποτίμηση Options με μεθόδους Monte Carlo

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εκτίμηση της μεταβλητότητας (Volatility)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η οικονομία της Ελλάδας τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί σημαντικά. Το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών έχει αναβαθμιστεί καθώς πλέον θεωρείται από τους μεγαλύτερους χρηματοοικονομικούς οργανισμούς ως ώριμη και αναδυόμενη αγορά. Μέχρι πριν από κάποια χρόνια τα Παράγωγα Προϊόντα ήταν ένας άγνωστος θεσμός στην Ελλάδα. Η ανάπτυξη τα τελευταία χρόνια του χρηματιστηρίου έφερε και στην Ελλάδα το θεσμό των Παραγώγων Προϊόντων. Την παρούσα χρονική στιγμή η χρηματιστηριακή αγορά έχει περιλάβει τα παράγωγα προϊόντα σε κάποιες συγκεκριμένες μορφές όπως θα δούμε στη συνέχεια ως μέρος των διαπραγματεύσεων αποδεικνύοντας ότι είναι όντως πιο ώριμη αγορά από τα προηγούμενα χρόνια.

Στόχος της εργασίας είναι να καλυφθεί διεξοδικά το θέμα της αποτίμησης των παραγώγων προϊόντων και να υλοποιηθούν κάποιες μέθοδοι οι οποίες να μπορούν να εφαρμοστούν από τους ενδιαφερόμενους φορείς.

Πιο συγκεκριμένα, σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη και η ανάλυση του volatility, δηλαδή της μεταβλητότητας των τιμών των μετοχών και του τρόπου που αυτή συμβάλει στην αποτίμηση των options. Το εγχείρημα αυτό εμφανίζεται ιδιαίτερα ενδιαφέρον, καθώς οι περισσότεροι ερευνητές θεωρούν τη μεταβλητότητα ως έναν από τους βασικούς συντελεστές επηρεασμού των τιμών των options.

Στην παρούσα διατριβή αναλύονται διεξοδικά όλες οι μορφές μεταβλητότητας, παρουσιάζεται εκτενώς το μαθηματικό και στατιστικό τους υπόβαθρο και τέλος γίνεται μια προσπάθεια σύγκρισης των διαφόρων αυτών μορφών μεταβλητότητας και των αποτελεσμάτων στις οποίες αυτές οδηγούν με την πραγματικότητα όσων αφορά την αποτίμηση πραγματικών options.

Η δομή της εργασίας έχει ορισθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να καλυφθούν διεξοδικά όλα τα θέματα που περιλαμβάνονται σχετικά με την αποτίμηση των Παράγωγων Προϊόντων

Θεωρήθηκε σκόπιμο να παρουσιάσουμε αρχικά την έννοια των παράγωγων προϊόντων και πώς αυτά προσαρμόζονται στην ελληνική αγορά. Στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικότερα τα δικαιώματα-Options καθώς θα είναι και η κύρια μελέτη της παρούσας εργασίας. Έπειτα από την παρουσίαση αυτή αναφερόμαστε στη μέθοδο Monte Carlo και πως αυτή μπορεί να εφαρμοστεί στον χρηματοοικονομικό κόσμο και

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS

συγκεκριμένα για την αποτίμηση των δικαιωμάτων. Για την εφαρμογή των μεθόδων αυτών έχουμε δημιουργήσει τα αντίστοιχα λογισμικά προγράμματα τα οποία είναι και ένα από τα σημαντικά μέρη της εργασίας αυτής. Τα συγκεκριμένα προγράμματα έχουν δημιουργηθεί μέσω του λογισμικού πακέτου προγραμματισμού MATLAB 6.0.0.88 (R12) . Τέλος, γίνεται η σύγκριση των μορφών μεταβλητότητας και όπως αυτές εφαρμόζονται στην πράξη και παρατίθενται τα αποτελέσματα μαζί με τα γενικότερα συμπεράσματα, τα οποία μπορούμε να τα συνοψίσουμε ως εξής:

A) Δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των μεθόδων Black-Scholes και Stochastic Volatility.

B) Υπάρχουν όμως διαφορές με κάποιες τιμές της αγοράς, οι οποίες όπως θα δούμε στη συνέχεια οφείλονται σε παράγοντες ανεξάρτητους της ανάλυσης. Ίσως και για το λόγο αυτό τελικά, η αγορά χρησιμοποιεί την Implied Volatility.

Τέλος στο παράρτημα της εργασίας έχει παρατεθεί ένα λεξιλόγιο παραγώγων για την ευκολότερη πρόσβαση και κατανόηση των όρων που περιλαμβάνουν τα παράγωγα προϊόντα.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS

Κεφάλαιο 1

Παράγωγα Προϊόντα

ΕΝΟΤΗΤΕΣ :

- **Η έννοια των παράγωγων προϊόντων**
- **Η ιστορία των παράγωγων προϊόντων**
- **Τα παράγωγα προϊόντα στην Ελλάδα**
- **Θέσεις-Στρατηγική στα παράγωγα προϊόντα**
- **Περιθώριο Ασφαλείας (margin)**
- **Κατηγορίες επενδυτών**

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS

1.1 Η έννοια των παράγωγων προϊόντων

Παράγωγο προϊόν θεωρείται μια διμερής σύμβαση, της οποίας η αξία εξαρτάται από την αξία ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου ή ενός δείκτη. Η τιμή του παράγωγου προϊόντος συνδέεται με την εξέλιξη της τιμής άλλων, πρωτογενών προϊόντων. Έτσι, τα παράγωγα προϊόντα αναφέρονται σε μετοχές, δείκτες μετοχών, ομολογίες, συνάλλαγμα ή εμπορεύματα. Τα πιο γνωστά παράγωγα προϊόντα είναι τα προθεσμιακά συμβόλαια (forwards και futures), οι ανταλλαγές (swaps) και τα δικαιώματα (options).

Δύο παραδοσιακά οφέλη συνδέονται με τα παράγωγα. Πρώτον, χρησιμοποιούνται για τη διαχείριση και τη μετακύλιση του κινδύνου και δεύτερον, η διαπραγμάτευσή τους αποδίδει προβλέψιμες τιμές που παρέχουν πληροφόρηση στην αγορά, για την πραγματική αξία ορισμένων επενδυτικών στοιχείων και για τη μελλοντική κατεύθυνση της οικονομίας.

Τα χρηματιστηριακά παράγωγα προϊόντα που τελούν υπό διαπραγμάτευση στο πλαίσιο μιας οργανωμένης αγοράς έχουν δύο κρίσιμα χαρακτηριστικά-πλεονεκτήματα. Πρώτον, είναι συμβάσεις που καταρτίζονται μεταξύ ενός μέλους και της οργανωμένης αγοράς και τα χρηματιστηριακά συμβόλαια έχουν την «εγγύηση» της αγοράς στην οποία υπόκεινται προς διαπραγμάτευση. Δεύτερον, κάθε προϊόν έχει τα ίδια χαρακτηριστικά και αυτή η τυποποίηση τα καθιστά ανταλλάξιμα, τους προσδίδει ρευστότητα και δυνατότητα συμψηφισμού, αντίθετα με ό,τι ισχύει σε παράγωγα προϊόντα που δεν είναι εισηγμένα σε οργανωμένες αγορές.

Παραγωγικές επιχειρήσεις, τράπεζες, αμοιβαία κεφάλαια, επενδυτικές εταιρίες, ασφαλιστικές εταιρίες, ασφαλιστικά ταμεία, το δημόσιο και άλλοι επενδυτές χρησιμοποιούν την αγορά παραγώγων. Για παράδειγμα, ο διαχειριστής ενός συνταξιοδοτικού ταμείου μπορεί να μειώσει τον κίνδυνο των επενδύσεών του σε μετοχές και έτσι να προάγει την ευημερία των συμμετεχόντων στο ταμείο αυτό. Επίσης μία βιομηχανία τροφίμων που επιδιώκει μία επένδυση, για παράδειγμα σε μία άλλη χώρα, ίσως την εγκαταλείψει αν δεν μπορέσει να διαχειριστεί τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους που συνδέονται με αυτή. Αλλά και ένας ιδιώτης επενδυτής που θέλει, για παράδειγμα, να αγοράσει ένα σπίτι επιλέγει μεταξύ δανείου σταθερού ή κυμαινόμενου επιτοκίου. Η ικανότητα ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος να προσφέρει αυτή την επιλογή στον δανειζόμενο εξαρτάται από την

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ικανότητα του ιδρύματος να διαχειριστεί τον δικό του χρηματοοικονομικό κίνδυνο μέσω της αγοράς χρηματιστηριακών παραγώγων.

1.2 Η ιστορία των παράγωγων προϊόντων

Τα συμβόλαια δικαιωμάτων συναλλάσσονταν στο Χρηματιστήριο του Άμστερνταμ (Amsterdam Bourse) ήδη από τον 17ο αιώνα. Αυτή η πληροφορία πηγάζει από μία έκδοση με τίτλο «Η Σύγχυση της Σύγχυσης» ("The Confusion of Confusion") από τον Ισπανό συγγραφέα Don Jose de la Vega που γράφηκε το 1688. Στο βιβλίο του, ο De La Vega ήδη περιέγραφε ένα συμβόλαιο δικαιωμάτων. Μέχρι τον 19ο αιώνα, τα συμβόλαια δικαιωμάτων είχαν γίνει ένα συνηθισμένο εργαλείο που συναλλάσσονταν στα χρηματιστήρια όλου του κόσμου. Στον 20ο αιώνα, οι συναλλαγές δικαιωμάτων διακόπηκαν από πολέμους και από τη Μεγάλη Κρίση του 1929.

Στις Η.Π.Α. οι συναλλαγές συμβολαίων δικαιωμάτων άρχισαν ξανά μετά τον Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο στην εξωχρηματιστηριακή αγορά [OTC (over-the-counter) market]. Τον Απρίλιο του 1973 οι συναλλαγές δικαιωμάτων αγοράς (call options) εισήχθησαν στο Χρηματιστήριο Παραγώγων του Σικάγο [Chicago Board Options Exchange (CBOE)].

Τα τελευταία 15 χρόνια, οι αγορές δικαιωμάτων έχουν ανθίσει, μία τάση η οποία άρχισε στις Η.Π.Α. και σύντομα εξαπλώθηκε στην Ευρώπη. Υπό το φως αυτών των εξελίξεων, η εξοικείωση με τις συναλλαγές συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (futures) και δικαιωμάτων (options) θα αποτελέσει ένα επιπλέον εργαλείο του κλάδου των χρηματοοικονομικών αναλυτών στην ελληνική αγορά. Παράλληλα, με την εξέλιξη των αγορών δικαιωμάτων, οι θεωρητικές προεκτάσεις του μηχανισμού συναλλαγών παρουσίασαν και αυτές σημαντική πρόοδο: η ηλεκτρονική ανάλυση δεδομένων δημιούργησε τη βάση για τη αποτελεσματική διαχείριση αυτών των σύνθετων σχέσεων.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

1.3 Τα παράγωγα προϊόντα στην Ελλάδα

Μέχρι πριν από κάποια χρόνια στην Ελλάδα υπήρχε μη οργανωμένη αγορά παραγώγων. Δηλαδή υπήρχαν παράγωγα προϊόντα τα οποία διαπραγματεύονταν σε μη οργανωμένη αγορά (over the counter). Τα προϊόντα αυτά ήταν κυρίως προθεσμιακά συμβόλαια (forwards) και ανταλλαγές (swaps) και προσφέρονταν συνήθως από τράπεζες.

Μέσω της αγοράς αυτής οι επενδυτές απολάμβαναν πλεονεκτήματα όπως, να καθορίζουν τους όρους των συμβολαίων, να κάνουν συμβόλαια στα μέτρα τους, διασφαλίζοντας και μια εμπιστευτικότητα στις συναλλαγές τους. Τα μειονεκτήματα της αγοράς αυτής ήταν ότι δεν είχε επαρκή διαφάνεια, δεν ελεγχόταν, δεν υπάκουε σε επαρκείς προληπτικούς κανόνες και κανονισμούς, δεν υπήρχε όργανο να εγκρίνει τα προϊόντα που διαπραγματεύονται, ούτε όργανο να περιορίζει τις τοποθετήσεις σε αυτή, ενώ δεν υπήρχε οργανισμός εκκαθάρισης να εγγυηθεί τις συναλλαγές και επομένως, δεν αντιμετωπιζόταν ο πιστωτικός κίνδυνος.

Το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών (ADEX) και η Εταιρία Εκκαθάρισης Συναλλαγών επί Παραγώγων (ΕΤ.Ε.Σ.Ε.Π.) δημιούργησαν στην Ελλάδα μια οργανωμένη αγορά παραγώγων.

Στο ADEX ήδη διαπραγματεύονται Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (futures) και Δικαιώματα (options) βασισμένα προς το παρόν μόνο σε δείκτη μετοχών.

Συγκεκριμένα έχουμε:

Παράγωγα σε δείκτη μετοχών (FTSE/ASE-20)

Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (futures) στον δείκτη FTSE/ASE-20.

Δικαιώματα (options) στον δείκτη FTSE/ASE-20.

Παράγωγα σε δείκτη μετοχών (FTSE/ASE-40)

Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (futures) στον δείκτη FTSE/ASE-40.

Δικαιώματα (options) στον δείκτη FTSE/ASE-40.

Τα προϊόντα που έχουν ήδη εκπονηθεί και τα οποία προγραμματίζεται να εισαχθούν σταδιακά είναι :

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS · ATHENS · ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Παράγωγα σε μετοχές

Δικαιώματα (options) σε επιλεγμένες μετοχές.

Παράγωγα σε ομόλογα

Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (futures) σε 10-ετή ομόλογα Ελληνικού Δημοσίου.

Παράγωγα σε επιτόκια

Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (futures) στο 3-μηνιαίο διατραπεζικό ATHIBOR

Παράγωγα σε ισοτιμίες

Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (futures) σε :
EURO/USD,EURO/XEU,EURO/JPY

Η διαπραγμάτευση των παράγωγων προϊόντων γίνεται ηλεκτρονικά (screen trading) μέσω του ΟΑΣΗΣ (Ολοκληρωμένο Αυτόματο Σύστημα Ηλεκτρονικών Συναλλαγών), σε αντιδιαστολή με τη διαπραγμάτευση με το σύστημα της αντιφώνησης (open outcry ή floor).

Ο χρηματιστηριακός δείκτης FTSE/ASE-20 για τον οποίον αναφερθήκαμε παραπάνω είναι αποτέλεσμα της συνεργασίας του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ) και του οργανισμού FTSE International. Είναι βασισμένος σε 20 από τις μεγαλύτερες σε κεφαλαιοποίηση εταιρίες, οι οποίες είναι εγγεγραμμένες στο ΧΑΑ και των οποίων οι μετοχές πληρούν τα απαραίτητα κριτήρια εμπορευσιμότητας. Ο δείκτης αυτός απεικονίζει με ακρίβεια της κινήσεις τις αγοράς και χρησιμοποιείται από διαχειριστές χαρτοφυλακίων για την αξιολόγηση της απόδοσης των επενδύσεών τους (benchmark), αλλά και για τη δημιουργία νέων αμοιβαίων κεφαλαίων, η λειτουργία των οποίων βασίζεται σε χρηματιστηριακό δείκτη. Επίσης, ο δείκτης αυτός σχεδιάστηκε για να υποστηρίξει την λειτουργία της αγοράς παραγώγων, με την εισαγωγή προϊόντων που θα βασίζονται στο FTSE/ASE-20.

Κατά τον ίδιο τρόπο έχει δημιουργηθεί και ο χρηματιστηριακός δείκτης FTSE/ASE-40 στον οποίο συμμετέχουν 40 εταιρείες υψηλής κεφαλαιοποίησης εισηγμένες στο χρηματιστήριο αξιών Αθηνών.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1.4 Θέσεις-Στρατηγική στα παράγωγα προϊόντα

Μια θέση περιγράφει τα δικαιώματα και τις υποχρεώσεις που συνδέονται με τις συναλλαγές που έχουν ήδη γίνει και μπορεί να είναι θέση αγοράς ή πώλησης. Μια θέση αγοράς (long position) είναι σε γενικές γραμμές μία αγορά η οποία δεν έχει ακόμη κλείσει (ισοσταθμιστεί από μια αντίστροφη συναλλαγή). Μία θέση πώλησης (short position), σε αντίθεση, είναι μία πώληση που δεν έχει ακόμη κλείσει. Μη κλεισμένες θέσεις ονομάζονται ανοικτές (open) θέσεις.

Οι βασικές θέσεις σε futures (ΣΜΕ - συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης) είναι :

Αγορά συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης (Long Futures)
Πώληση συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης (Short Futures)

Οι βασικές θέσεις σε options (Δικαιώματα Προαίρεσης) είναι :
Αγορά δικαιώματος αγοράς (long call)
Αγορά δικαιώματος πώλησης (long put)
Πώληση δικαιώματος αγοράς (short call)
Πώληση δικαιώματος πώλησης (short put)

Παράδειγμα 1
Πώς θα μπορούσε ο κάτοχος ενός χαρτοφυλακίου μετοχών του ΧΑΑ να χρησιμοποιήσει την αγορά παραγώγων για να αντιμετωπίσει μια επικείμενη κρίση ;

Θέση πώλησης future στο FTSE/ASE-20 (Short on FTSE/ASE-20 Futures)

Αυτή είναι η θέση του συμβαλλόμενου που υποχρεούται να πουλήσει το υποκείμενο προϊόν στη συμφωνημένη τιμή και ημερομηνία.

Ο πωλητής αναμένει ότι οι τιμές των μετοχών θα μειωθούν στις επόμενες εβδομάδες. Αντιδρά πουλώντας δέκα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης πάνω στο δείκτη FTSE/ASE-20, στη σημερινή τιμή των 2110 μονάδων. Το κάθε συμβόλαιο κοστίζει 50 Euro. Το πλήρες αντίτιμο του διακανονισμού της συναλλαγής δεν καταβάλλεται με την εκπλήρωση του συμβολαίου. Μέρος καταβάλλεται αρχικά και το υπόλοιπο

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

καταβάλλεται με ημερήσιο διακανονισμό.

Στην περίπτωση που ο δείκτης FTSE/ASE-20 πέσει στις 2050 μονάδες μέχρι την συμφωνημένη ημερομηνία, ο συμβαλλόμενος κερδίζει ένα καθαρό ποσό 60 μονάδων (2110 - 2050) το οποίο αντιστοιχεί σε 3.000 Euro (10 x 60 x 50 Euro.). Αυτό το κέρδος πρέπει να πληρωθεί από τον αντισυμβαλλόμενο που αγόρασε το συμβόλαιο στην τιμή των 2110 μονάδων.

Παράδειγμα 2

Πώς θα μπορούσε ο επενδυτής να χρησιμοποιήσει την αγορά παραγώγων για να εκμεταλλευτεί μία επικείμενη άνοδο της αγοράς ;

Θέση αγοράς future στο FTSE/ASE-20 (Long on FTSE/ASE-20 Futures)

Αυτή είναι η θέση του συμβαλλόμενου που υποχρεούται να αγοράσει το υποκείμενο προϊόν στη συμφωνημένη τιμή και ημερομηνία.

Στην περίπτωση αυτή ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου αναμένει εισροή κεφαλαίων στο μέλλον και, συγχρόνως, βλέπει ανοδική πορεία της αγοράς στην οποία θέλει να συμμετάσχει.

Αντιδρά αγοράζοντας 20 συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης πάνω στο δείκτη FTSE/ASE-20, στη σημερινή τιμή του συμβολαίου των 2110 μονάδων. Όπως και προηγουμένως κάθε συμβόλαιο κοστίζει 50 Euro ενώ το πλήρες αντίτιμο του διακανονισμού της συναλλαγής δεν καταβάλλεται με την εκπλήρωση του συμβολαίου. Μέρος καταβάλλεται αρχικά και το υπόλοιπο καταβάλλεται με ημερήσιο διακανονισμό και με το κλείσιμο της θέσης.

Στην περίπτωση που ο δείκτης FTSE/ASE-20 ανέβει στις 2180 μονάδες μέχρι αυτήν την ημερομηνία, ο συναλλασσόμενος κερδίζει ένα καθαρό ποσό 70 μονάδων (2180 - 2110) το οποίο αντιστοιχεί σε 70.000 Euro (20 x 70 x 50 Euro). Αυτό το κέρδος πρέπει να πληρωθεί από τον άλλο αντισυμβαλλόμενο που πούλησε το συμβόλαιο στην τιμή των 2110 μονάδων.

OIKONOMIKO ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS

1.5 Περιθώριο Ασφαλείας (margin)

Όταν δύο επενδυτές αποφασίσουν να διαπραγματευτούν χρηματοοικονομικά παράγωγα εκτός της οργανωμένης αγοράς, διατρέχουν άμεσο κίνδυνο αθέτησης της συμφωνίας, όταν ο ένας εκ των δύο συμβαλλόμενων δεν τηρήσει την υποχρέωση που ανέλαβε. Ένας από τους σημαντικότερους λόγους για την δημιουργία οργανωμένης αγοράς παραγώγων είναι και η εξάλειψη αυτού του πιστωτικού κινδύνου μέσω της εκάστοτε εταιρείας εκκαθάρισης λογαριασμών που είναι υπεύθυνη σε κάθε χρηματιστήριο η οποία μπαίνει ως ο αντισυμβαλλόμενος σε κάθε συναλλαγή σε παράγωγα προϊόντα. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο, η εταιρεία ζητά την κατάθεση, σε τράπεζα θεματοφυλακής, του περιθωρίου ασφάλειας, το οποίο αναπροσαρμόζεται καθημερινά (marked to market) ανάλογα με την τιμή της υποκείμενης αξίας. Αυτό όπως γίνεται αντιληπτό ειδικά στην περίπτωση των futures είναι σημαντικό πλεονέκτημα για τους επενδυτές καθώς με λιγότερα χρήματα δεσμευμένα μπορούν να διεκδικήσουν μεγαλύτερα κέρδη.

1.6 Κατηγορίες επενδυτών

Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures), αλλά και τα δικαιώματα προαίρεσης (options) έχουν σημειώσει μεγάλη επιτυχία διεθνώς και ένας από τους σημαντικότερους λόγους είναι το γεγονός ότι έχουν προσελκύσει διαφορετικές κατηγορίες διαπραγματευτών / επενδυτών. Οι κατηγορίες αυτές μπορούν να γενικευθούν ως εξής :

Hedgers : Επενδυτές με στόχο την αντιστάθμιση κινδύνου. Η διαδικασία της αντιστάθμισης περιλαμβάνει ταυτόχρονη κατοχή δύο επενδυτικών θέσεων που παρέχουν την εγγύηση ότι οι πιθανές ζημίες από τη μία θα αντισταθμιστούν από τα κέρδη της άλλης. Ο βαθμός στον οποίο αντισταθμίζονται τα κέρδη με τις ζημίες ορίζει και την αποτελεσματικότητα του hedging.

Speculators : Επενδυτές με στόχο το γρήγορο κέρδος αναλαμβάνοντας κίνδυνο. Η διαδικασία του speculation δηλαδή είναι η αγοραπωλησία αξιόγραφων για τα οποία το κέρδος δεν είναι δεδομένο (άρα ενέχεται ποσοστό ρίσκου) αλλά

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

αναμενόμενο, βάσει των αποκλειστικών πληροφοριών που πιστεύει πως έχει ο κερδοσκόπος.

Arbitrageurs : Επενδυτές που εκμεταλλεύονται ατέλειες της αγοράς με στόχο το κέρδος χωρίς κίνδυνο.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS

Κεφάλαιο 2

Options – Δικαιώματα Προαίρεσης

ΕΝΟΤΗΤΕΣ :

- **Options – Δικαιώματα Προαίρεσης**
- **Είδη Option**
- **Παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή των Options**
- **Παραδείγματα με Options (Options Trading)**

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

2.1 Options – Δικαιώματα Προαίρεσης

Option είναι ένα συμβόλαιο που δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα – αλλά όχι την υποχρέωση – να αγοράσει ή να πουλήσει μια συγκεκριμένη ποσότητα αγαθού, αξίας, νομίσματος και γενικά κάποιου διαπραγματεύσιμου ή μη τίτλου σε μια προσυμφωνημένη τιμή και μετά από κάποιο προκαθορισμένο χρονικό διάστημα ή κατά τη διάρκεια του διαστήματος αυτού.

Στη συνέχεια όταν θα αναφερόμαστε για option θα εννοούμε το δικαίωμα πώλησης ή αγοράς μετοχών.

Η προκαθορισμένη τιμή αγοράς ή πώλησης της μετοχής ονομάζεται τιμή εξάσκησης-εκτέλεσης (exercise price) ενώ το ποσό για την αγορά του δικαιώματος αγοράς ή πώλησης της μετοχής ονομάζεται premium.

Συμβολισμοί που θα ακολουθηθούν για την κατανόηση των τύπων που θα προκύψουν.

Πίνακας Συμβολισμών

Τιμή άσκησης (exercise price)	K
Τιμή μετοχής τη χρονική στιγμή t	S_t
Τρέχουσα τιμής μετοχής	S0 ή S_0
Μεταβλητότητα της μετοχής (Volatility)	σ
Αξία Call option (Call Premium)	C
Αξία Put option (Put Premium)	P
Χρόνος ως τη λήξη του Option	T-t
Χρόνος λήξης Option	T
Επιτόκιο αγοράς	r
Μέρισμα ανά μετοχή (ως ποσοστό επί της μετοχής)	δ

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

2.2 Είδη Option

➢ Ανάλογα με το χρόνο εξάσκησής τους

Αν ένα option μπορεί να ασκηθεί, δηλαδή να τερματιστεί η ισχύς του, μόνο κατά τη λήξη της προκαθορισμένης χρονικής περιόδου, τότε λέμε ότι είναι ευρωπαϊκού τύπου. Αντίθετα, αν ο δικαιούχος του option έχει την επιλογή να εξασκήσει το δικαίωμά του οποιαδήποτε στιγμή επιθυμεί μέσα στο προσυμφωνημένο χρόνο τότε το option είναι αμερικανικού τύπου.

➢ **Ανάλογα με τη συναλλαγή που ορίζουν**

Ανάλογα με το αν η συναλλαγή δίνει στον κάτοχο του συμβολαίου το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει μετοχές τα options χωρίζονται αντίστοιχα σε call και put

Call option είναι το δικαίωμα αγοράς μιας μετοχής, ομολόγου ή νομίσματος στην τιμή άσκησης μετά από (ή μέσα σε) κάποιο χρονικό διάστημα καταβάλλοντας σήμερα ένα ποσό το οποίο ονομάζεται premium.

Εκδότης calls : Ιδιώτης ή θεσμικός επενδυτής ο οποίος προβλέπει ότι η τιμή της μετοχής θα έχει πτωτική πορεία στο μέλλον.

Αγοραστής calls : Ο επενδυτής που έχει αντίθετες προσδοκίες από τον εκδότη του call, αναμένοντας ότι η τιμή της μετοχής θα αυξηθεί στο μέλλον.

Υποχρεώσεις του εκδότη των Calls : Είναι υποχρεωμένος να παραδώσει τον αριθμό των μετοχών που έχει συμφωνηθεί μεταξύ αυτού και του αγοραστή σε συγκεκριμένη τιμή οποιαδήποτε στιγμή αυτές ζητηθούν από τον κάτοχο του call (αν πρόκειται για Αμερικανικού τύπου Options) ή στη λήξη της περιόδου (αν πρόκειται για Ευρωπαϊκού τύπου Options).

Υποχρεώσεις του κατόχου των calls : Η καταβολή τη στιγμή αγοράς του Call ενός ποσού ίσου με την τιμή αγοράς του δικαιώματος (Call Premium) και η καταβολή κατά τη στιγμή εκτέλεσης (αν εκτελεστεί) ενός ποσού ίσου με το γινόμενο των προς αγορά μετοχών επί την τιμή εκτέλεσης ανά μετοχή.

Covered calls : Σημαίνει ότι ο εκδότης κατέχει τις μετοχές επί των οποίων εγγράφονται τα δικαιώματα.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Uncovered calls : Σημαίνει ότι ο εκδότης δεν κατέχει τις μετοχές κατά το χρόνο έκδοσης των Calls αλλά αναλαμβάνει την ευθύνη να τις αγοράσει όταν του ζητηθούν.

Put option είναι το δικαίωμα πώλησης μιας συγκεκριμένης ποσότητας αξίας, αγαθού ή νομίσματος μετά από (ή μέσα σε) ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και σε μια ορισμένη τιμή (την τιμή άσκησης).

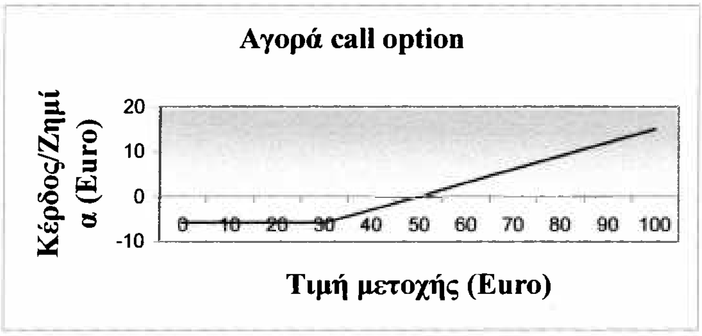
Εκδότης put : Ιδιώτης ή θεσμικός επενδυτής ο οποίος προβλέπει ότι η τιμή της μετοχής θα έχει ανοδική πορεία στο μέλλον.

Αγοραστής calls : Ο επενδυτής που έχει αντίθετες προσδοκίες από τον εκδότη του put, αναμένοντας ότι η τιμή της μετοχής θα μειωθεί στο μέλλον.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τα διαγράμματα για αγορά και πώληση call ή put option. Τα σημεία στα οποία αλλάζει κλίση η ευθεία αντιστοιχούν στην τιμή εκτέλεσης του option. Τα σημεία στα οποία η γραμμή τέμνει τον άξονα των x΄x αντιστοιχούν στην τιμή εκτέλεσης του option συν το κόστος του δικαιώματος.

Στους αντίστοιχους πίνακες παρουσιάζεται ο κίνδυνος που ενέχεται καθώς επίσης και το μέγιστο κέρδος που μπορούμε να επιτύχουμε.

Διάγραμμα 2.1

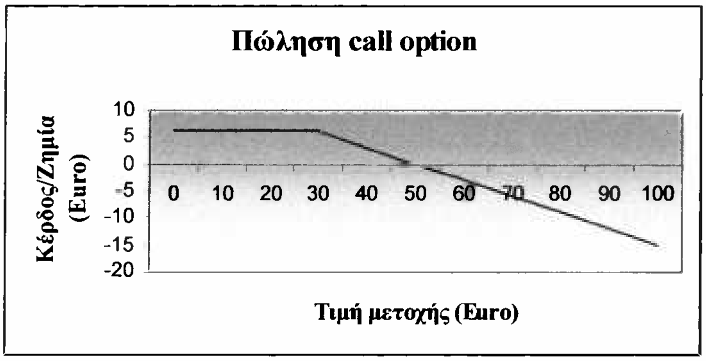


Πίνακας 2.1

Αγορά call option	
Κίνδυνος μέγιστης ζημίας	Τιμή αγοράς του δικαιώματος (premium)
Μέγιστο κέρδος	Απεριόριστο

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

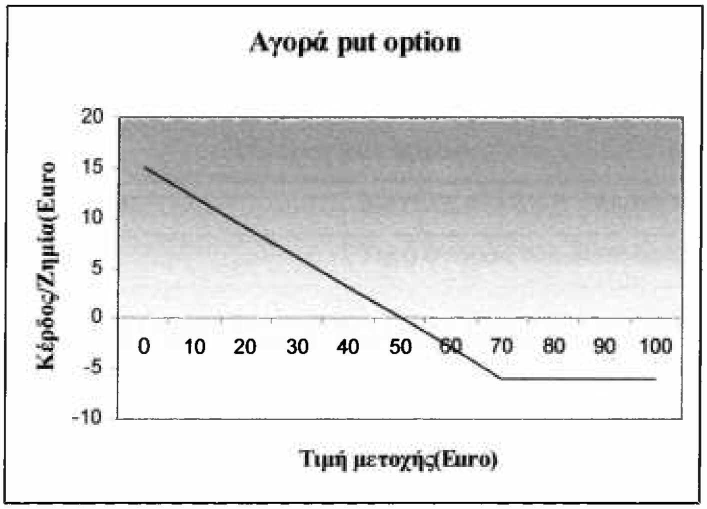
Διάγραμμα 2.2



Πίνακας 2.1

Πώληση call option	
Κίνδυνος μέγιστης ζημίας	Απεριόριστη
Μέγιστο κέρδος	Τιμή πώλησης του δικαιώματος (premium)

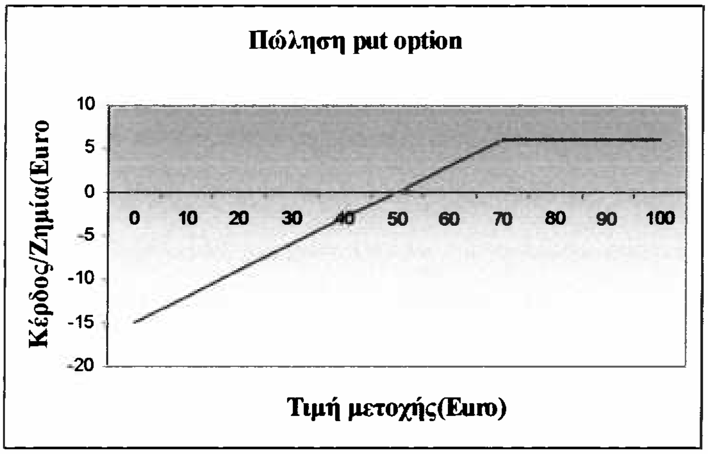
Διάγραμμα 2.1



Πίνακας 2.1

Αγορά put option	
Κίνδυνος μέγιστης ζημίας	Τιμή αγοράς του δικαιώματος (premium)
Μέγιστο κέρδος	Μεγάλο αλλά όχι απεριόριστο

Διάγραμμα 2.1



Πίνακας 2.1

Πώληση put option	
Κίνδυνος μέγιστης ζημίας	Μεγάλη αλλά όχι απεριόριστη
Μέγιστο κέρδος	Τιμή αγοράς του δικαιώματος (premium)

2.3 Παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή των options

Οι παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή των options είναι οι εξής :

- Τιμή άσκησης του option (K)
- Η μεταβλητότητα της μετοχής (volatility)
- Χρόνος ως τη λήξη του option (T-t)
- Η τρέχουσα τιμή μετοχής (S)

➢ Το επιτόκιο αγοράς (r)

Συγκεκριμένα για τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η τιμή των options σε σχέση με τους παράγοντες αυτούς έχουμε :

1) Τιμή άσκησης του option (X): Για τα calls όσο υψηλότερη είναι η τιμή άσκησης X τόσο μικρότερη είναι η αξία του. Αυτό ισχύει καθώς το X εκφράζει το όριο πάνω απ' το οποίο το call αρχίζει να γίνεται κερδοφόρο, και όσο μεγαλύτερο είναι αυτό το όριο τόσο πιο λίγες είναι οι πιθανότητες η τιμή του τίτλου να το ξεπεράσει και να αποφέρει κέρδη στον αγοραστή του. Έτσι για δύο καθ' όλα όμοια calls που η μόνη τους διαφορά είναι η τιμή άσκησης, αυτό με τη μεγαλύτερη τιμή άσκησης θα κοστίζει λιγότερο. Για τα puts και με το ανάλογο σκεπτικό θα έχουμε πως μεγαλύτερη τιμή άσκησης σημαίνει και μεγαλύτερη αξία.

2) Η μεταβλητότητα της μετοχής (volatility) :Όσο μεγαλύτερη είναι η volatility τόσο μεγαλύτερη είναι και η αξία ενός option (call ή put). Αυτό ισχύει καθώς μεγάλη volatility σημαίνει και αύξηση της πιθανότητας η τιμή της μετοχής να κλείσει μακριά από την τιμή εκτέλεσης κατά τη χρονική περίοδο που έχει ισχύ το option. Και στις δύο περιπτώσεις (call και put) αυτό σημαίνει ότι τα options θα αρχίσουν να κερδίζουν και άρα η αξία τους πρέπει να μεγαλώνει. Φυσικά μεγάλη μεταβλητότητα σημαίνει πως οι τιμές των μετοχών μπορούν να κινηθούν τόσο ανοδικά όσο και καθοδικά. Ωστόσο η αγορά ενός call ή put προσφέρει προστασία σε περίπτωση που η τιμή της μετοχής κλείσει κάτω (για το call) ή πάνω (για το put) από την τιμή άσκησης X. Αυτή η προστασία όπως έχουμε πει μεταφράζεται σε μια μέγιστη ζημία ίση με το premium. Έτσι η μεταβλητότητα αξιολογείται μόνο προς την κατεύθυνση που μπορεί να επηρεάσει θετικά την απόδοση ενός option.

3) Χρόνος ως τη λήξη του option (T-t): Όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος που μεσολαβεί για να ασκηθεί ένα option τόσο μεγαλύτερη είναι και η αξία του. Αυτό συμβαίνει διότι όσο περισσότερος χρόνος απομένει για την άσκηση του option τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να κλείσει η τιμή του σε περιοχή κερδοφορίας (πάνω από την τιμή άσκησης X για το call και κάτω από το X για το put). Όπως και στην περίπτωση της μεταβλητότητας έτσι και εδώ μόνο η ευνοϊκή κατεύθυνση έχει σημασία για την αξιολόγηση του option αφού υπάρχει προστασία για την αντίθετη

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ATHENS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

περίπτωση. Βάσει αυτού η αξία ενός option μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη. Την εσωτερική αξία (intrinsic value) που ορίζεται ως η τρέχουσα τιμή της μετοχής μείων την τιμή εξάσκησης και τη διαχρονική αξία (time value) που εκφράζει την υπεραξία του option (αξία πάνω από την εσωτερική). Όσο μικραίνει ο χρόνος που μεσολαβεί ως τη λήξη του option η εσωτερική αξία αυξάνεται και η διαχρονική αξία μειώνεται και κατά τη λήξη μηδενίζεται, οπότε το option έχει τότε μόνο εσωτερική αξία. Συνεπώς δεν είναι ποτέ καλύτερη η εξάσκηση ενός δικαιώματος πριν την ημερομηνία λήξης του καθώς έτσι μηδενίζεται η διαχρονική του αξία.

4) Η τρέχουσα τιμή μετοχής (S) : Για τα call (put) options όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της μετοχής τόσο πιο μεγάλη (μικρή) είναι η αξία του call (put) για τους λόγους που ίσχυαν και στην τιμή άσκησης.

5) Το επιτόκιο αγοράς (r) : Όσο υψηλότερο είναι το επιτόκιο τόσο μικρότερη είναι η σημερινή αξία της τιμής άσκησης του option που ο κάτοχος πρέπει να πληρώσει με τη λήξη του. Αυτό έχει θετική επίδραση για ένα call option και αρνητική επίδραση για ένα put option (οι λόγοι προκύπτουν όπως και στην περίπτωση 1 με την τιμή άσκηση του option).

Συνοπτικά ισχύει:

Παράγοντες	**Αξία call**	**Αξία put**
Τιμή άσκησης (Κ) ↑	↓	↑
Μέση απόκλιση (σ) ↑	↑	↑
Χρόνος (T-t) ↑	↑	↑
Τρέχουσα τιμή μετοχής (S) ↑	↑	↓
Επιτόκιο αγοράς (r) ↑	↑	↑

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

2.4 Παραδείγματα με δικαιώματα προαίρεσης (Options Trading)

- Πώς θα μπορούσε ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου να εκμεταλλευτεί επικείμενη άνοδο στην τιμή συγκεκριμένης μετοχής χρησιμοποιώντας τα options (δικαιώματα προαίρεσης) ;

Θέση αγοράς δικαιώματος αγοράς στη συγκεκριμένη μετοχή. Έστω STOCK η ονομασία της μετοχής. (Long Call)

Αυτή είναι η θέση του συμβαλλόμενου που έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει το υποκείμενο προϊόν στη συμφωνημένη τιμή.

Τιμή υποκείμενου τίτλου : 15 EURO
Τίμημα Δικαιώματος Πώλησης (option premium) σε τιμή εξάσκησης 15 EURO : 1 EURO
Μέγεθος Συμβολαίου : 100 μετοχές

Ένας επενδυτής προσδοκά ότι οι τιμές των μετοχών της εταιρίας STOCK θα ακολουθήσουν μια ευνοϊκή για αυτόν πορεία. Προς το παρόν, η τιμή της μετοχής είναι 15 EURO. Παρόλα αυτά, δεν επιθυμεί να ρισκάρει την επένδυση 15.000 EURO για να αγοράσει 1.000 μετοχές. Αντί αυτού, αποφασίζει να αγοράσει δέκα δικαιώματα αγοράς στην τιμή εξάσκησης των 15 EURO. Συνεπώς αποκτά το δικαίωμα να αγοράσει 1.000 μετοχές της STOCK στα 15 EURO τη μία, οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος (American Call). Για αυτό το δικαίωμα πληρώνει τιμή δικαιώματος 1 EURO ανά μετοχή. Το συνολικό του κόστος ανέρχεται στα 1000 EURO (10 συμβόλαια x 100 μετοχές x 1 EURO).

Αν οι μετοχές της STOCK συναλλάσσονται στα 17 EURO κατά την ημέρα λήξης του συμβολαίου, τότε ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμά του και θα αγοράσει τις μετοχές στα 15 EURO. Εφόσον έχει πληρώσει τιμή δικαιώματος 1 EURO, το κέρδος του ανά μετοχή ανέρχεται στο 1 EURO (17 - 15 - 1 = 1). Το συνολικό του κέρδος θα είναι 1000 EURO (10 συμβόλαια x 100 μετοχές x 1 EURO).

➢ Πώς θα μπορούσε ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου να εκμεταλλευτεί επικείμενη πτώση στην τιμή συγκεκριμένης μετοχής χρησιμοποιώντας τα δικαιώματα προαίρεσης ;

Θα μπορούσε να κερδίσει από την πτώση αυτή παίρνοντας :

Θέση αγοράς δικαιώματος πώλησης στη συγκεκριμένη μετοχή. Έστω ALBA η ονομασία της μετοχής. (Long Put)

Αυτή είναι η θέση του συμβαλλόμενου που έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση να πουλήσει το υποκείμενο προϊόν στη συμφωνημένη τιμή.

Τιμή υποκείμενου τίτλου : 4 EURO
Τίμημα Δικαιώματος Πώλησης (option premium) σε τιμή εξάσκησης 5 EURO : 0,5 EURO
Μέγεθος Συμβολαίου : 100 μετοχές

Προς το παρόν οι μετοχές τιμούνται στα 4 EURO. Ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου αναμένει πτώση της τιμής και αγοράζει είκοσι (20) δικαιώματα πώλησης με τιμή εξάσκησης 5 EURO και με τιμή δικαιώματος 0,5 EURO ανά μετοχή. Συνεπώς, δικαιούται πλέον να πουλήσει 2.000 μετοχές της ALBA (20 συμβόλαια x 100 μετοχές ανά συμβόλαιο) στα 5 EURO τη μία. Το συνολικό του κόστος ανέρχεται στα 1000 EURO (20 συμβόλαια x 100 μετοχές ανά συμβόλαιο x 0,5 EURO).

Υποθέτοντας ότι οι μετοχές της ALBA συναλλάσσονται στα 3 EURO κατά την ημέρα λήξης του συμβολαίου, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης θα εξασκήσει το δικαίωμά του και θα τις πουλήσει στα 5 EURO. Εφόσον έχει αρχικά πληρώσει την τιμή δικαιώματος των 0,5 EURO ανά μετοχή, το κέρδος του θα είναι 5-3-0,5=1,5 EURO ανά μετοχή. Το συνολικό του κέρδος θα είναι 3000 EURO (20 συμβόλαια x 100 μετοχές ανά συμβόλαιο x 0,5 EURO).

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS

- Πως θα μπορούσε ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου να αυξήσει την απόδοση του χαρτοφυλακίου του σε περίοδο στασιμότητας στην υποκείμενη χρηματιστηριακή αγορά;

Χρησιμοποιώντας δικαιώματα προαίρεσης και πουλώντας δικαίωμα αγοράς (short call ή covered call)

FTSE/ASE-20: 2.050 μον.
2.050 FTSE/ASE-20 δικαίωμα αγοράς : 200 μον.
Πολλαπλασιαστής : 6 EURO
Αξία ενός χαρτοφυλακίου μετοχών: 12.300 EURO (Πολλαπλασιαστής x FTSE/ASE-20)

Ο κάτοχος ενός χαρτοφυλακίου μετοχών, το οποίο συσχετίζεται πλήρως με το δείκτη FTSE/ASE-20, αναμένει ουδέτερη ή ελαφρώς καθοδική βραχυπρόθεσμη μεταβολή του δείκτη. Πουλώντας ένα δικαίωμα αγοράς στο δείκτη FTSE/ASE-20 στις 2.050 μονάδες ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου λαμβάνει ένα premium των 1200 EURO. Εάν ο δείκτης κυμανθεί κάτω από το σημείο των 2.250 (τιμή εξάσκησης του δικαιώματος συν το τίμημα του δικαιώματος που αποκτήθηκε), η απόδοση της καλυμμένης πώλησης δικαιώματος αγοράς πάντα θα υπερβαίνει την απόδοση του χαρτοφυλακίου μετοχών. Κατ' αυτό τον τρόπο ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου κατάφερε να αυξήσει την απόδοση του χαρτοφυλακίου του ακόμη και σε περίοδο στασιμότητας με αποτέλεσμα να ξεπεράσει τις αποδόσεις της αγοράς και να προσελκύσει περισσότερα κεφάλαια υπό την διαχείριση του.

- Πως διαπραγματεύεται ο κερδοσκόπος (speculator) στη αγορά παραγώγων και τι επιτυγχάνει χρησιμοποιώντας την , σε σύγκριση με την υποκείμενη αγορά;

Το σημαντικότερο σημείο αναφοράς στην συμπεριφορά του κερδοσκόπου επενδυτή είναι ότι συνήθως δεν κατέχει την υποκείμενη αξία της οποίας τα συμβόλαια διαπραγματεύεται, ενώ αναλαμβάνει τον κίνδυνο (από επενδυτές με στόχο την αντιστάθμιση κινδύνου) από δυσμενή μεταβολή στην υποκείμενη αγορά.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ATHENS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Παράδειγμα

Ο επενδυτής αυτός έχει την διαίσθηση ότι η μετοχή ΑΛΦΑ (η οποία διαπραγματεύεται σήμερα στα 15 EURO) θα σημειώσει άνοδο κατά τους προσεχείς μήνες και είναι διατεθειμένος να λάβει θέση στην αγορά παραγώγων, αντί να πάει κατευθείαν στην υποκείμενη αγορά και να αγοράσει την μετοχή. Η κίνηση αυτή θα μπορούσε να έχει τα ακόλουθα αποτελέσματα :

Τιμή υποκείμενου τίτλου : 15 EURO
Τίμημα δικαιώματος αγοράς της ΑΛΦΑ σε τιμή εξάσκησης 15 EURO : 1 EURO
Μέγεθος συμβολαίου : 100 μετοχές

Στρατηγική Α
Αγορά 300 δικαιωμάτων αγοράς (long call) της ΑΛΦΑ με τιμή εξάσκησης 15 EURO.
Αποτέλεσμα : αποκτά το δικαίωμα αγοράς 20.000 μετοχών της ΑΛΦΑ με κόστος 30.000 EURO (300 συμβόλαια x 100 μετοχές x 1 EURO)
Μετά από ένα μήνα :
Τιμή υποκείμενου τίτλου 16,5 EURO
Αποτέλεσμα: κέρδος 15.000 EURO το οποίο αναλύεται σε 30.000 μετοχές x (16,5 - 15 - 1)

Στρατηγική Β
Εναλλακτική επένδυση στην υποκείμενη αγορά
Με τα 30.000 EURO που έχει στη διάθεσή του ο επενδυτής αγοράζει 2.000 μετοχές της ΑΛΦΑ στα 15 EURO
Μετά από ένα μήνα :
Τιμή υποκείμενου τίτλου 16,5 EURO
Αποτέλεσμα : κέρδος 3.000 EURO το οποίο αναλύεται σε 2.000 μετοχές x 1,5 EURO (16,5 - 15)
Σύγκριση των δύο στρατηγικών :

Το αποτέλεσμα στην αγορά παραγώγων μας δείχνει την μόχλευση, η οποία επιτυγχάνεται επενδύοντας τα 30.000 EURO σε σχέση με την ίδια επένδυση στην υποκείμενη αγορά. Πρέπει να σημειωθεί ότι, το ίδιο μοχλευμένο αποτέλεσμα θα μπορούσε να είχε συμβεί αλλά με αρνητικές συνέπειες (μεγαλύτερες ζημίες από ότι θα είχε επενδύοντας στην υποκείμενη αγορά).

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Κεφάλαιο 3

Μοντέλα αποτίμησης Options

ΕΝΟΤΗΤΕΣ :

- **Μοντέλα αποτίμησης Options**
- **Διωνυμικό μοντέλο**
- **Μοντέλο των Black & Scholes**
- **Αποτίμηση call option με τον τύπο των Black & Scholes**

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

3.1 Μοντέλα αποτίμησης options

Στον χρηματοοικονομικό κόσμο υπάρχουν δύο μοντέλα αποτίμησης option. Το ένα στηρίζεται σε διακριτές τιμές ενώ το δεύτερο σε συνεχείς. Τα μοντέλα αυτά είναι αντίστοιχα:

1) Διωνυμικό μοντέλο
2) Μοντέλο των Black-Scholes

3.2 Διωνυμικό μοντέλο

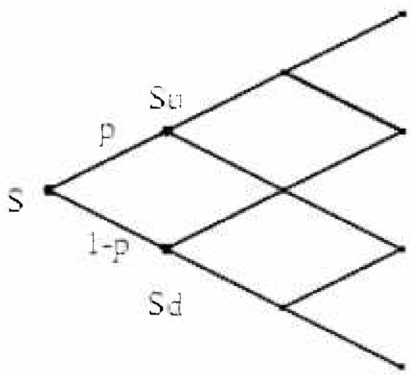
Το διωνυμικό μοντέλο[1] θεωρείται απλούστερο για την αξιολόγηση των options. Στηρίζεται στις εξής υποθέσεις:

1) Η κατανομή των τιμών του αξιόγραφου στο οποίο είναι γραμμένο το option είναι πολυδιάστατη διωνυμική.
2) Δεν υπάρχει κόστος συναλλαγών.
3) Το βραχυπρόθεσμο και χωρίς κίνδυνο επιτόκιο της αγοράς είναι σταθερό σε όλες τις περιόδους.

Η βασική φιλοσοφία αυτού του μοντέλου είναι σχετικά απλή. Χωρίζουμε το χρόνο ως τη λήξη του option σε διακριτές τιμές και σε κάθε τέτοια στιγμή θεωρούμε ότι η μετοχή ή γενικότερα η αξία στην οποία αναφέρεται το Option μπορεί να πάρει δύο τιμές. Αφού φτιαχτεί ένα δέντρο με τα πιθανά σενάρια μετακίνησης της μετοχής και υπολογιστούν και οι τιμές της κατά την ημερομηνία λήξης του option, υπολογίζουμε βάσει αυτών τις τιμές του option εκείνη τη χρονική στιγμή και μετακινούμενοι προς τα πίσω βρίσκουμε την αξία του option σήμερα. Το διάγραμμα δέντρου απεικονίζεται συνήθως όπως φαίνεται παρακάτω. Σε κάθε κόμβο έχουμε αντίστοιχα την τιμή της μετοχής ή του option καθώς και την εκάστοτε πιθανότητα για την τιμή τους. Οι πιθανότητες αποτελούν το μέτρο κάτω από το οποίο εφαρμόζεται το μοντέλο.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

<u>Διάγραμμα 3.1</u>



Δεν θα προχωρήσουμε περαιτέρω στην ανάλυση του διωνυμικού μοντέλου καθώς βρίσκεται εκτός των ενδιαφερόντων και του σκοπού της παρούσας εργασίας. Άλλωστε το διωνυμικό μοντέλο θεωρείται λιγότερο ισχυρό σαν εργαλείο αποτίμησης options απ' ότι το μοντέλο των Black-Scholes.

3.3 Μοντέλο Black & Scholes

Το διωνυμικό υπόδειγμα δεν είναι δυνατό να περιγράψει επαρκώς την τιμή εξέλιξης μιας μετοχής καθώς η άνοδος ή η κάθοδος στην τιμή της γίνεται σε καθορισμένο μικρό χρονικό διάστημα. Αντίθετα στην πραγματικότητα άλλοτε αυτό μπορεί να είναι ακόμα μικρότερο ή μεγαλύτερο. Θέλουμε επίσης να υπάρχει τυχαιότητα κάτι το οποίο δεν συνέβαινε πλήρως στο διωνυμικό υπόδειγμα. Για το λόγο αυτό πρέπει να θεωρήσουμε τις τιμές ως συνεχείς. Αυτό θα σημαίνει ότι :

1.Οι τιμές μπορούν να αλλάξουν από στιγμή σε στιγμή
2.Κάθε πραγματικός αριθμός θεωρείται ως τιμή
3.Οι τιμές είναι συνεχείς, δηλαδή αν η τιμή αυξηθεί από το 1.00 στο 1.05 υποτίθεται ότι θα πρέπει να έχει περάσει από όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

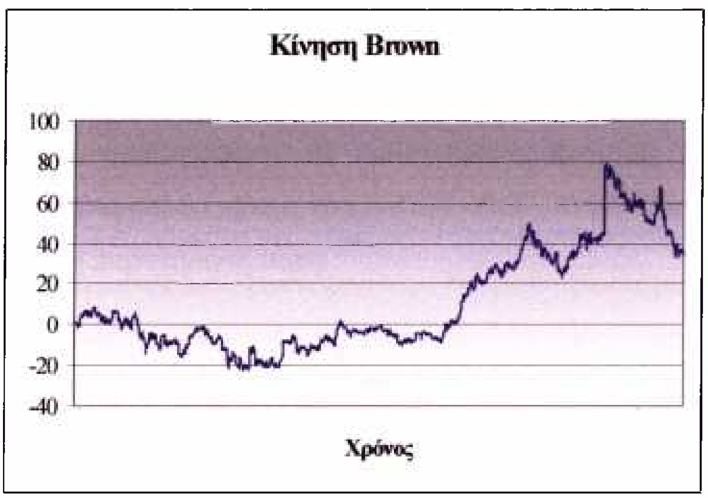
Είναι προφανές πως αν παραστήσουμε γραφικά την πορεία εξέλιξης της τιμής μια τυχαίας μετοχής θα είναι περίπου όπως στο παρακάτω σχήμα.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

Διάγραμμα 3.2

Επίσης η κίνηση Brown (Brownian motion) γραφικά είναι όπως στο διάγραμμα 3.3.

Διάγραμμα 3.3



Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε αρχικά ότι η κίνηση των μετοχών είναι μια κατάλληλη προσαρμοσμένη κίνηση Brown και αυτό θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να κάνουμε.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS

Η κίνηση Brown ορίζεται μέσω του τυχαίου περίπατου και για να υφίσταται θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις. Έτσι η σειρά W = (W_t : t ≥ 0) είναι P-κίνηση Brown αν και μόνο αν

1) W_t συνεχές και W_0 =0

2) η τιμή του W_t κατανέμεται κάτω από το μέτρο P ως τυχαία κανονική μεταβλητή N(0,t)

3) η αύξηση W_{s+t} - W_t κατανέμεται κανονικά N(0,t) κάτω από το μέτρο P και ανεξάρτητα από το F_s (την προϊστορία που είχε η σειρά τη χρονική στιγμή s).

Θέλουμε να βρούμε μια σχέση-ένα μοντέλο το οποίο να μας δίνει τη τιμή μιας μετοχής από την κίνηση Brown.

Γνωρίζουμε λοιπόν πως η κίνηση Brown έχει μέσο μηδέν τη στιγμή που η τιμή της κάθε μετοχής αυξάνεται διαχρονικά με κάποιο ρυθμό λόγω των επιτοκίων της αγοράς καθώς και λόγω του πληθωρισμού. Για το λόγο αυτό το μοντέλο αυτό θα έχει τάση ,έστω μ η οποία διαχρονικά θα δίνει την απαιτούμενη αύξηση της μετοχής στο χρόνο.

Προς το παρόν προκύπτει το μοντέλο

$$S_t = W_t + \mu \cdot t$$

Επίσης όπως έχουμε σημειώσει σε προηγούμενες ενότητες η μετοχή έχει μεταβλητότητα σ την οποία και θα πρέπει να υπολογίσουμε στο μοντέλο . Το μοντέλο θα γίνει σύμφωνα με την παρατήρηση αυτή:

$$S_t = \sigma \cdot W_t + \mu \cdot t$$

Επειδή η τιμή μιας μετοχής δεν παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές, γεγονός που δεν συμβαίνει με την κίνηση Brown, το πιο σωστό μοντέλο θα ήταν το :

$$S_t = \exp(\sigma \cdot W_t + \mu \cdot t) \tag{3.1}$$

το οποίο είναι ένα απλό και αρκετά καλό μοντέλο. Το μοντέλο αυτό ονομάζεται εκθετική κίνηση Brown με τάση ή αλλιώς γεωμετρική κίνηση Brown με τάση. Προσομοιώνοντας από αυτό το μοντέλο θα μπορέσουμε να πάρουμε τιμές για την τιμή της μετοχής οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Τη διαδικασία αυτή θα τη δούμε αναλυτικότερα στη συνέχεια.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

Οι Black & Scholes λοιπόν χρησιμοποιούν ένα portfolio το οποίο θα περιέχει κάποιες μονάδες ομολόγων και κάποιες μονάδες μετοχών. Οι τύποι που περιγράφουν την εξέλιξη της τιμής τους είναι:

Για το ομόλογο: $B_t = \exp(rt)$ (3.2)

Για τη μετοχή: $S_t = S_0 \cdot \exp(\sigma \cdot W_t + \mu \cdot t)$ (3.3)

Ο λόγος για τον οποίο χρειάζεται το ομόλογο είναι για να προεξοφλούμε κάθε φορά μελλοντικές τιμές της μετοχής δηλαδή να βρίσκουμε την παρούσα αξία τους.

Αν λοιπόν το χαρτοφυλάκιο (portfolio) αποτελείται από ϕ_t μονάδες μετοχής και ψ_t μονάδες ομολόγου τη χρονική στιγμή t τότε θα λέμε ότι έχουμε ένα portfolio (ϕ_t, ψ_t). Θέλουμε το ϕ_t να είναι F-previsible διαδικασία δηλαδή η τιμή του τη χρονική στιγμή t να εξαρτάται από την πληροφορία ως τη χρονική στιγμή t. Επίσης θα πρέπει η αξία του portfolio να μεταβάλλεται μόνο όταν μεταβάλλεται η τιμή της μετοχής του χαρτοφυλακίου. Η ιδιότητα αυτή ονομάζει το portfolio self-financing. Η τεχνική υπόθεση που θα πρέπει να ισχύει για να έχουμε ένα self-financing portfolio είναι να ισχύει η διαφορική εξίσωση $dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$ αν V_t είναι η αξία του portfolio τη χρονική στιγμή t. Η πρακτική σημασία ενός self-financing portfolio είναι ότι δεν χρειάζεται να βάζουμε ή να βγάζουμε χρήματα από το portfolio αγοράζοντας ή πουλώντας μετοχές και ομόλογα αλλά ανάλογα να ρυθμίζουμε τον αριθμό των μετοχών και ομολόγων που κάθε φορά θα διαθέτουμε ώστε η αξία του να είναι ίση με τη τιμή του παραγώγου που εμείς θέλουμε να αποτιμήσουμε.

Η στρατηγική λοιπόν που ακολουθούμε είναι να διαθέτουμε ένα self-financing portfolio τέτοιο ώστε να ισχύει $V_T = \phi_T S_T + \psi_T B_T = X$ (όπου X η τιμή του παραγώγου τη χρονική στιγμή T) και $\int_0^T \sigma_t^2 \phi_t^2 dt < \infty$. Αυτή η στρατηγική είναι γνωστή ως replicating strategy. Η replicating strategy είναι όπως είπαμε πολύ σημαντική καθώς βρίσκουμε την τιμή του παραγώγου X (claim X) και ανάλογα την τιμή του στην αγορά κινούμαστε για την επίτευξη κέρδους με μηδενικό κίνδυνο (arbitrage).

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

Αν r το επιτόκιο αγοράς θα πρέπει να προεξοφλήσουμε τόσο την τιμή της μετοχής όσο και την τιμή του claim. Θα ισχύει λοιπόν $Z_t = B_t^{-1} S_t$ για τη μετοχή και $B_t^{-1} X$ για το claim.

Με πράξεις έχουμε ότι:

$$Z_t = B_t^{-1} S_t = \exp(-rt) \cdot \exp(\sigma \cdot W_t + \mu \cdot t) = \exp(\sigma \cdot W_t + (\mu - r) \cdot t) \quad (3.4)$$

Εμείς χρειαζόμαστε τη διαφορική εξίσωση του τύπου (3.4). Αυτό θα γίνει με *Itô* calculus.

Itô calculus

Έστω ότι X είναι μια στοχαστική διαδικασία και ισχύει $dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$.

Επίσης f συνεχής και υπάρχει η δεύτερη παράγωγός της.

Τότε $dY_t = df(X_t) = (\sigma_t \cdot f'(X_t))dW_t + (\mu_t \cdot f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \cdot f''(X_t))dt$

Εφαρμόζοντας λοιπόν *Itô* calculus στον τύπο (3.4) θα προκύψει ότι

$$dZ_t = Z_t(\sigma \cdot dW_t + (\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot dt) \quad (3.5)$$

Αφού πρώτα έχω θεωρήσει σύμφωνα με τον τύπο $X_t = \sigma \cdot W_t + (\mu - r) \cdot t$ και $Y_t = Z_t = \exp(X_t) = f(X_t)$. Άρα $f'(X_t) = f''(X_t) = \exp(X_t) = Z_t$.

Θα πρέπει η στοχαστική διαδικασία Z_t να είναι martingale.

Martingale

Μια στοχαστική διαδικασία M_t είναι martingale κάτω από το μέτρο P αν και μόνο αν :

i) $E_P(|M_t|) < \infty$ για όλα τα t

ii) $E_P(M_t / F_s) = M_s$ για όλα τα $s \leq t$.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Σύμφωνα με θεώρημα μια στοχαστική διαδικασία X είναι martingale αν και μόνο αν δεν έχει τάση (είναι driftless, δηλαδή μ=0).

Η στοχαστική διαδικασία X θα έχει στοχαστική διαφορική εξίσωση $dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$ και θα πρέπει να ικανοποιεί την τεχνική υπόθεση : $E\left[\left(\int_0^T \sigma_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$.

Συνεπώς η στοχαστική διαδικασία Z_t θα είναι martingale αν τις αφαιρέσουμε την τάση. Αυτό μπορεί να γίνει με το θεώρημα των Cameron -Martin-Girsanov :

Cameron-Martin-Girsanov theorem

Αν W_t είναι P – κίνηση Brown και γ_t είναι μια F-previsible διαδικασία (εξαρτάται από την πληροφορία ως τη χρονική στιγμή t) η οποία ικανοποιεί τον περιορισμό $E_P \exp\left(\frac{1}{2}\cdot\int_0^T \gamma_t^2 dt\right) < \infty$ τότε υπάρχει μέτρο Q τέτοιο ώστε :

(i) Q ισοδύναμο του P

(ii) $\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)$

(iii) $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ είναι Q –κίνηση Brown .

Αντίστροφο του Cameron-Martin-Girsanov theorem

Αν W_t είναι P – κίνηση Brown και Q είναι ένα μέτρο ισοδύναμο του P τότε υπάρχει μια είναι μια F-previsible διαδικασία γ_t τέτοια ώστε $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ που να είναι Q –κίνηση Brown .

Αν θέσουμε λοιπόν στον τύπο (3.5) $\gamma = \dfrac{\mu - r + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2}{\sigma}$ και εφαρμόζοντας το αντίστροφο του θεωρήματος C-M-G θα προκύψει ότι $d\widetilde{W}_t = dW_t + \gamma \cdot dt$ όπου $\widetilde{W}_t$ Q –κίνηση Brown . Αντικαθιστώντας λοιπόν στον τύπο θα προκύψει ότι $dS_t = \sigma \cdot Z_t \cdot d\widetilde{W}_t$ οπότε η Z_t μπορεί πλέον να θεωρηθεί ως μια Q –martingale διαδικασία .

Επίσης ο όρος $E_t = E_Q(B_t^{-1}X / F_t)$ (δηλαδή η αναμενόμενη τιμή του claim X κάτω από το μέτρο Q τη χρονική στιγμή t) είναι martingale διαδικασία καθώς ισχύει ότι: $E_Q(E_t / F_s) = E_Q(E_Q(B_t^{-1}X / F_t) / F_s) = E_Q(B_t^{-1}X / F_s) = E_s$

Έχουμε λοιπόν δύο Q –martingale διαδικασίες , την S_t και την E_t.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS

Martingale Representation Theorem

Έστω M_t μια Q –martingale διαδικασία για την οποία ισχύει ότι $\sigma_t > 0$.

Αν N_t μια Q –martingale διαδικασία τότε υπάρχει μια F-previsible διαδικασία φ τέτοια ώστε $\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty$ με πιθανότητα 1 και το N μπορεί να γραφεί ως $N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s dM_s$ όπου το φ θα είναι μοναδικό.

Εφαρμόζοντας το martingale representation theorem αφού ικανοποιούνται οι υποθέσεις θα έχουμε ότι $dE_t = \phi_t \cdot dZ_t$. Αφού λοιπόν χρειαζόμαστε για το προεξοφλημένο claim ϕ_t μονάδες προεξοφλημένης μετοχής το ίδιο θα ισχύει μεταξύ πραγματικού claim X και μετοχής S_t. Όσον αφορά τις μονάδες προεξοφλημένου ομολόγου που θα πρέπει να διαθέτουμε θα είναι $\psi_t = E_t - \phi_t \cdot Z_t$.

Θα ισχύει λοιπόν για την αξία του portfolio $V_T = \phi_T S_T + \psi_T B_T = \phi_T S_T + (E_T - \phi_T Z_T) B_T = B_T \cdot E_T = X$.

Άρα η replicating strategy είναι :

- Κρατάμε ϕ_t μονάδες μετοχής τη χρονική στιγμή t
- Κρατάμε $\psi_t = E_t - \phi_t \cdot Z_t$ μονάδες ομολόγου.

Αυτό που μένει να εξετάσουμε είναι αν το portfolio είναι self-financing.

$$dV_t = d(B_t E_t) = B_t dE_t + E_t dB_t \xrightarrow{dE_t = \phi_t dZ_t} = B_t \phi_t dZ_t + E_t dB_t$$
$$\xrightarrow{E_t = \psi_t + \phi_t Z_t} = B_t \phi_t dZ_t + (\psi_t + \phi_t Z_t) dB_t = \phi_t (B_t dZ_t + Z_t dB_t) + \psi_t dB_t$$
$$= \phi_t d(B_t Z_t) + \psi_t dB_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$$

Ισχύει λοιπόν η ιδιότητα του self-finance portfolio $dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

Καταλήξαμε λοιπόν σε ένα portfolio με ϕ_t μονάδες μετοχής και ψ_t μονάδες ομολόγου , στο οποίο δεν χρειάζεται να βάζουμε ή να βγάζουμε χρήματα (self-financing ιδιότητα) και το σημαντικότερο, ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις που ισχύουν στον κόσμο των Black & Scholes.

3.4 Αποτίμηση call option με τον τύπο των Black & Scholes

Θεωρούμε τιμή εκτέλεσης K και ημερομηνία εξάσκησης του δικαιώματος T (θα θεωρήσουμε ότι είναι ευρωπαϊκού τύπου το call option) . Η τιμή του option (του claim) τη χρονική στιγμή T θα είναι : $X = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$. Την παρούσα χρονική στιγμή η αξία του option θα είναι : $V_0 = e^{-rt} E_Q\left((S_T - K)^+\right)$.

Για να βρούμε την αναμενόμενη τιμή του claim θα πρέπει να βρούμε την κατανομή του S_T κάτω από το μέτρο Q. Θα θεωρήσουμε ότι το μοντέλο που περιγράφει την μετοχή μας έχει τάση r δηλαδή ίση με το επιτόκιο αγοράς. Το μοντέλο δηλαδή θα είναι $S_t = \exp(\sigma \cdot W_t + r \cdot t)$. Κάτω από το μέτρο Q για να είναι χωρίς τάση το μοντέλο (driftless), οπότε να είναι Martingale διαδικασία, θα πρέπει, όπως είδαμε στην ενότητα 3.3, να ισχύει :

$$S_t = \exp\left[\sigma \cdot \widetilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot t\right] \Rightarrow$$

$$\log S_t = \sigma \cdot \widetilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot t \Rightarrow$$

$$d(\log S_t) = \sigma \cdot d\widetilde{W}_t + (r - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2) \cdot dt \qquad (3.6)$$

Αν θεωρήσουμε s τη τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή μηδέν τότε θα έχουμε :

$$\log S_t = \log s + \sigma \cdot \widetilde{W}_t + (r - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2) \cdot t$$

$$S_t = s \cdot \exp\left[\sigma \cdot \widetilde{W}_t + (r - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2) \cdot t\right]$$

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Θεωρούμε ότι $Z \sim N(-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\mathrm{T},\ \sigma^2\cdot\mathrm{T})$ οπότε $S_T = s\cdot e^{Z+r\cdot t}$.

Η τιμή του claim τότε θα είναι :

$$e^{-r\cdot t}E\left[(s\cdot e^{(Z+r\cdot t)}-K)^+\right]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\mathrm{T}}}\cdot\int_{\log(\frac{K}{s})}^{\infty}\left\{e^{-rt}(s\cdot e^{(Z+r\cdot t)}-K)\cdot\exp\left[-\frac{(x+\frac{1}{2}\sigma^2\mathrm{T})^2}{2\sigma^2\mathrm{T}}\right]\right\}\cdot dx$$

Αφού $\Phi(\chi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\chi}\exp(-\frac{y^2}{2})\cdot dy$

θα έχουμε ότι:

$$V(s,T)=s\cdot\Phi\left(\frac{\log\frac{s}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\cdot\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}\right)-\mathrm{K}\cdot e^{-rt}\cdot\Phi\left(\frac{\log\frac{s}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\cdot\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}\right)$$

Ο τελευταίος τύπος αποτελεί και το μοντέλο αποτίμησης call options των Black & Scholes.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Κεφάλαιο 4

Μέθοδοι Monte Carlo

ΕΝΟΤΗΤΕΣ :

- **Εισαγωγή**
- **Monte Carlo ολοκλήρωση**
- **Αντίθετες τυχαίες μεταβλητές (Antithetic Variates)**
- **Τυχαίες μεταβλητές ελέγχου (Control Variates)**

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό[2] κρίθηκε σκόπιμο να παρουσιάσω τις μεθόδους προσομοίωσης Monte Carlo ή διαφορετικά τις τεχνικές ελάττωσης διασποράς Monte Carlo. Βάσει αυτών θα στηριχτούμε στα επόμενα κεφάλαια για την αποτίμηση των δικαιωμάτων-options και για την καταγραφή των αντίστοιχων λογισμικών προγραμμάτων.

Συγκεκριμένα αναφέρονται οι εξής μέθοδοι:

- Monte Carlo ολοκλήρωση
- Αντίθετες τυχαίες μεταβλητές (Antithetic Variates)
- Τυχαίες μεταβλητές ελέγχου (Control Variates)

4.2 Monte Carlo ολοκλήρωση

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\theta = \int \phi(x) f(x) dx$$

η οποία είναι άγνωστη και έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Σε πολλές περιπτώσεις ο υπολογισμός του ολοκληρώματος αυτού είναι αρκετά δύσκολος και αποτελεί επίπονη έως αδύνατη διαδικασία η επίλυσή του με τις γνωστές μεθόδους ολοκλήρωσης.

Η Monte Carlo ολοκλήρωση βοηθά στον υπολογισμό του ολοκληρώματος αυτού ως εξής :

Έστω ότι παράγουμε τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από την κατανομή με σ.π.π. $f(x)$.

Θέτουμε $\hat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \phi(X_i)}{n}$

Τότε

$$E(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(\phi(X_i))}{n} = \frac{n \cdot E(\phi(X))}{n} = E(\phi(X)) = \int \phi(x) f(x) dx = \theta$$

και

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

$$V(\hat{\theta}) = \frac{n \cdot E(\phi(X))}{n^2} = n^{-1} \cdot V(\phi(X)) = n^{-1} \cdot \int [\phi(x) - \theta]^2 f(x)dx = \frac{c}{\sqrt{n}}$$ για κάποια σταθερά c. Η $\hat{\theta}$ λοιπόν είναι αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια του θ και το τυπικό σφάλμα της είναι ανάλογο του $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Άρα όσο μεγαλώνει το δείγμα τόσο πιο αξιόπιστη (με μικρότερη τυπική απόκλιση) θα είναι η εκτίμηση.

4.3 Αντίθετες τυχαίες μεταβλητές (Antithetic variates)

Έστω ότι $\hat{\theta}_1(X), \hat{\theta}_2(X)$ είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες του θ με διασπορές αντίστοιχα $V(\hat{\theta}_1), V(\hat{\theta}_2)$.

Θα έχουμε τότε :

$$E\left[\frac{1}{2}\left(\hat{\theta}_1(X) + \hat{\theta}_2(X)\right)\right] = \frac{2\theta}{2} = \theta$$

και

$$V\left[\frac{1}{2}\left(\hat{\theta}_1(X) + \hat{\theta}_2(X)\right)\right] = \frac{1}{4}V(\hat{\theta}_1(X)) + \frac{1}{4}V(\hat{\theta}_2(X)) + \frac{1}{2}Cov(\hat{\theta}_1(X), \hat{\theta}_2(X))$$

Αν υποθέσουμε ότι $V(\hat{\theta}_1) = V(\hat{\theta}_2)$, τότε:

$$V\left[\frac{1}{2}\left(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2\right)\right] = \frac{1}{2}V(\hat{\theta}_1) + \frac{1}{2}Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$$

$$= \frac{1}{2}V(\hat{\theta}_1)\left[1 + \frac{Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}{\sqrt{V(\hat{\theta}_1)V(\hat{\theta}_2)}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}V(\hat{\theta}_1)\left[1 + Corr(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)\right]$$

Συνεπώς αν η συσχέτιση μεταξύ των $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ είναι μεγάλη και αρνητική τότε:

$$V\left[\frac{1}{2}\left(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2\right)\right] << V(\hat{\theta}_1).$$

Συνήθως στην περίπτωση αυτή επιλέγουμε μεταβλητές που είναι αντίθετες μεταξύ τους. Αν έχουμε δηλαδή αρχικά προσομοιώσει από τη μεταβλητή Ε στη συνέχεια προσομοιώνουμε από την –Ε.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS

4.4 Τυχαίες μεταβλητές ελέγχου (Control Variates)

Οι τυχαίες μεταβλητές ελέγχου αποτελούν μια τεχνική ελάττωσης διασποράς που δίνει καλύτερα αποτελέσματα απ' ότι οι δύο προηγούμενες μέθοδοι.

Η μέθοδος σχετίζεται με τη μέθοδο της παλινδρόμησης. Επιθυμούμε πάλι την εκτίμηση του θ. Έστω $\theta = \mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(\phi(X))$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $W = \psi(X)$ με γνωστή την αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής W και ότι είναι συσχετισμένη με τη μεταβλητή Z.

Τότε αν έχουμε δείγμα $X_1, X_2, ..., X_n$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[Z_i - (W_i - E(W_i))\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\phi(x_i) - \left[\psi(x_i) - E(\psi(x_i))\right]\right]$$

και

$$E(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[E(\phi(X)) - \left[E(\psi(x_i)) - E(\psi(x_i))\right]\right] = \frac{1}{n}\cdot nE(\phi(X)) = \theta$$

Η $V(\hat{\theta})$ θα περιλαμβάνει την –Cov(Z,W) οπότε αν η συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών Z και W είναι μεγάλη τότε η $V(\hat{\theta})$ θα είναι μικρή γεγονός που είδαμε και στις αντίθετες μεταβλητές.

Προεκτείνοντας τα παραπάνω έστω ότι:

$W_j = \psi_j(X)$, $\quad j = 1,2,...,p$ με $E(W_j)$ γνωστή .

Τότε για κάποια $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p$ θα έχουμε ότι:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i) - \beta_1(W_1 - E(W_1)) - ... - \beta_p(W_p - E(W_p))\right\}$$

οπότε

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\left\{V\left[\phi(X_i) - \beta_1(W_1 - E(W_1)) - ... - \beta_p(W_p - E(W_p))\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{E\left[\phi(X_i) - \beta_1(W_1 - E(W_1)) - ... - \beta_p(W_p - E(W_p))\right]\right\}^2 -$$

$$- E^2\left\{V\left[\phi(X_i) - \beta_1(W_1 - E(W_1)) - ... - \beta_p(W_p - E(W_p))\right]\right\}$$

Άρα η ελαχιστοποίηση της $V(\hat{\theta})$ ως προς τα β_i , i =1,...p για δεδομένα W επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση της

$$E\left[Z-\beta_1(W_1-E(W_1))-\ldots-\beta_p(W_p-E(W_p))\right]^2$$

η οποία είναι η αναμενόμενη τετραγωνική απόσταση της Z από τον γραμμικό συνδυασμό των W. Είναι προφανής η σύνδεση με την πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση.

Στην πράξη η διαδικασία λειτουργεί ως εξής:

Ξεκινάμε επιλέγοντας μερικές μεταβλητές W και από κάποια πιλοτική δειγματοληψία (pilot study) παράγουμε δείγμα $z_j, w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{pj}$ όπου j = 1,2,...N και επιλέγουμε β_i , i = 1,...,p που ελαχιστοποιούν το άθροισμα

$$\sum_{j=1}^{N}(z_j-\sum_{i=1}^{p}\beta_i w_{ij})^2 .$$

Όλες τις παραπάνω μεθόδους θα τις δούμε αναλυτικά και στη συνέχεια, αφού όπως είπαμε θα εφαρμοστούν για την αποτίμηση των δικαιωμάτων-options.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS

Κεφάλαιο 5

Αποτίμηση Options με μεθόδους Monte Carlo

ΕΝΟΤΗΤΕΣ :

- **Αποτίμηση Ευρωπαϊκού Call Option με μέθοδο Monte Carlo**
- **Αποτίμηση Ευρωπαϊκού Call Option με μέθοδο Αντιθέτων Μεταβλητών (Antithetic Variates)**
- **Αποτίμηση Ευρωπαϊκού Call Option μέσω τυχαίων μεταβλητών ελέγχου (Control Variates)**
- **Σύγκριση των μεθόδων**
- **Ασιατικά options (ή Average-Rate Options) - (Παρουσίαση και Αποτίμηση)**

OF ECONOMICS & BUSINESS ATHENS UNIVERSITY ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

5.1 Αποτίμηση Ευρωπαϊκού Call Option με μέθοδο Monte Carlo

Έστω ένα option ευρωπαϊκού τύπου το οποίο πληρώνει C_T στην ημερομηνία λήξης Τ. Αρχικά προσομοιώνουμε τη διαδικασία για τις μεταβολές στην τιμή του σήμερα ως την ημερομηνία λήξης Τ. Στη συνέχεια προεξοφλούμε με το εκάστοτε επιτόκιο οπότε για κάθε προσομοίωση j = 1,…,M έχουμε :

$$C_{0,j} = \exp\left(-\int_0^T r_u du\right) C_{T,j} \qquad (5.1)$$

Αν το επιτόκιο είναι σταθερό τότε :

$$C_{0,j} = \exp(-rT) C_{T,j} \qquad (5.2)$$

Αν κάνουμε την προσομοίωση έστω Μ φορές τότε η εκτίμηση για την τιμή του option θα είναι:

$$\hat{C}_0 = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} C_{0,j} \qquad (5.3)$$

Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης αυτής είναι:

$$SE(\hat{C}_0) = \frac{SD(C_{0,j})}{\sqrt{M}} \qquad (5.4)$$

όπου $SD(C_{0,j}) = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{j=1}^{M}\left(C_{0,j} - \hat{C}_0\right)^2}$ (5.5)

Μια απλή εφαρμογή θα δούμε αρχικά για option ευρωπαϊκού τύπου στον κόσμο των Black & Scholes. Γνωρίζουμε ότι η σωστή μέθοδος αποτίμησης είναι των Black & Scholes ωστόσο χρησιμοποιούμε την προσομοίωση στη συγκεκριμένη εφαρμογή για να κατάλάβουμε την εφαρμογή της και σε περιπτώσεις όπου το μοντέλο των Black & Scholes δε μπορεί να εφαρμοστεί όπως θα δούμε παρακάτω.

Όπως είδαμε στην ενότητα 3, τύπος 3.6 σύμφωνα με τους Black & Scholes ισχύει ότι:

$$d(\log S_t) = \sigma \cdot d\widetilde{W}_t + (r - \frac{1}{2}\cdot\sigma^2)\cdot dt$$

Αν πάρω μικρές αλλαγές στη θέση των διαφορικών θα έχω:

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

$$\Delta(\log S_t) = \sigma \cdot \Delta \widetilde{W}_t + (r - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2) \cdot \Delta t$$

$$\log S_{t+\Delta t} - \log S_t = \sigma \cdot (\widetilde{W}_{t+\Delta t} - \widetilde{W}_t) + (r - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2) \cdot \Delta t$$

$$\log S_{t+\Delta t} = \log S_t + \left[\sigma \cdot (\widetilde{W}_{t+\Delta t} - \widetilde{W}_t) + (r - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2) \cdot \Delta t \right]$$

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot \exp\left[\sigma \cdot (\widetilde{W}_{t+\Delta t} - \widetilde{W}_t) + (r - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2) \cdot \Delta t \right]$$

Όπως γνωρίζουμε ήδη αφού $\widetilde{W}_t$ είναι κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q θα ισχύει (σύμφωνα με την τρίτη υπόθεση της κίνησης Brown) ότι:

$$\widetilde{W}_{t+\Delta t} - \widetilde{W}_t \sim N(0, \Delta t)$$

Άρα αν $\varepsilon \sim N(0,1)$ στη θέση του $\widetilde{W}_{t+\Delta t} - \widetilde{W}_t$ μπορώ να αντικαταστήσω με το γινόμενο $\sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon$ αφού $\sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon \sim \mathrm{N}(0, \Delta t)$. Θα προσομοιώσω δηλαδή από τυποποιημένη κανονική κατανομή (N(0,1)) και κάθε φορά θα αντικαθιστώ τη τιμή του ε στον τύπο που προκύπτει:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot \exp\left[(r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \right] \qquad (5.6)$$

Το Δt καθορίζεται από το πόσα μικρά διαστήματα θα χωρίσουμε τη χρονική περίοδο από την παρούσα χρονική στιγμή 0 ως την περίοδο λήξης του option T. Αν N είναι τα διαστήματα που θα χωρίσουμε την περίοδο αυτή τότε $\Delta t = \frac{T}{N}$.

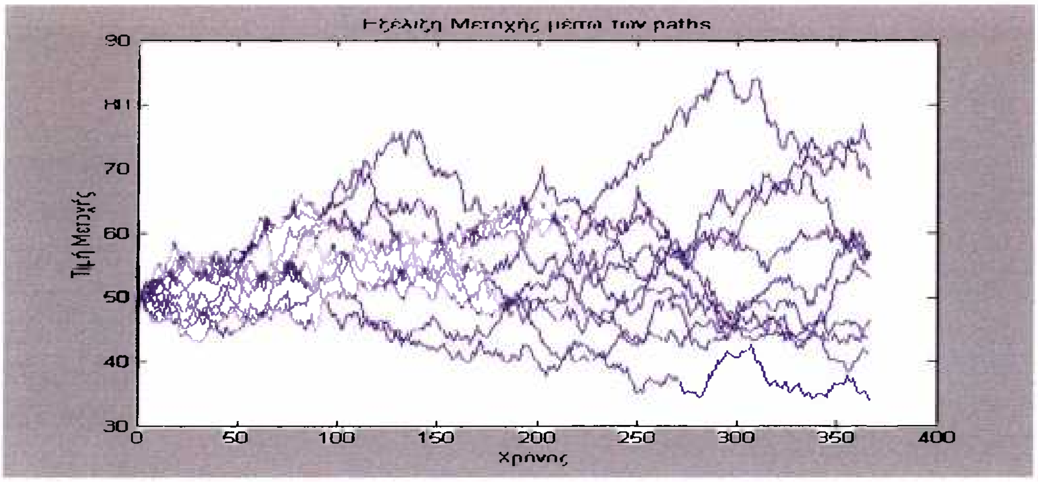
Αν θεωρήσουμε ότι από τη μετοχή προκύπτουν μερίσματα ετησίως ως ποσοστό επί της μετοχής (τα έχουμε συμβολίσει με δ) τότε ο τύπος (5.6) γίνεται :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot \exp\left[(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \right] \qquad (5.7)$$

Ξεκινούμε δηλαδή από την τρέχουσα τιμή της μετοχής και μέσω προσομοίωσης εκτιμούμε το S_T, το οποίο είναι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή λήξης του option. Στο παρακάτω διάγραμμα παρατηρούμε την πορεία εξέλιξης δέκα τέτοιων προσομοιώσεων. Στην πράξη βέβαια για να πάρουμε αξιόπιστα αποτελέσματα θα πρέπει να προσομοιώσουμε τη διαδικασία πολλές φορές.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

<u>**Διάγραμμα 5.1**</u>



Για κάθε προσομοιωμένο path υπολογίζουμε τη τιμή του option στην λήξη σύμφωνα με τους τύπους max(0, S_T -K) για call option ή max(0,K- S_T) για put option όπου K είναι η exercise price και S_T η τιμή της μετοχής στη λήξη. Τελικά η τιμή του call option 'σήμερα' θα είναι ο προεξοφλημένος μέσος όρος των τιμών του option που υπολογίσαμε για κάθε path. Συνεπώς για ένα call option για παράδειγμα θα έχουμε:

$$\hat{C}_0 = \exp(-rT)\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\max(0, S_{T,j} - K) \qquad (5.8)$$

Το πρόγραμμα το οποίο εκτελεί την διαδικασία αυτή δίνεται παρακάτω από το πρόγραμμα 5.1:

Τα αποτελέσματα δίνουν την εκτίμηση για την τιμή του option, την διακύμανση της εκτίμησης αυτής καθώς και το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης. Το ίδιο θα ισχύει για όλα τα προγράμματα που θα δούμε στη συνέχεια.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Πρόγραμμα 5.1

```
% OptionPrice.m
function [CPaths , SECPaths]=OptionPrice(S0,K,r,delta,sigma,T,NSteps,NRep)
CPaths = zeros(NRep, 1);
SPaths = zeros(NRep, 1+NSteps);
SPaths(:,1)=S0;
dt = T/NSteps;
for i=1:NRep
    for j=1:NSteps
        SPaths(i,j+1)=SPaths(i,j)*exp((r-delta-0.5*sigma^2)*dt+ sigma*sqrt(dt)*randn);
        CPaths(i,1)=exp(-r*T)*max(SPaths(i,NSteps+1)-K,0);
    end
end
[CPaths, SECPaths, CI] = normfit(CPaths)
```

όπου :

S0 η τρέχουσα τιμή της μετοχής

K η τιμή εκτέλεσης του option

r το επιτόκιο αγοράς

delta = δ η μερισματική απόδοση

T χρόνος ως τη λήξη του option

sigma = σ η τιμή της volatility

NSteps ο αριθμός των διαστημάτων στα οποία χωρίζουμε την περίοδο ως τη λήξη του option

NRep ο αριθμός των επαναλήψεων-προσομοιώσεων της διαδικασίας

Είναι δυνατόν για τον υπολογισμό του Ευρωπαϊκού call option που είδαμε παραπάνω να θεωρήσουμε N=1 δηλαδή να μην προσομοιώσουμε ολόκληρο το path αλλά να υπολογίσουμε κατευθείαν την τιμή του option στην ημερομηνία λήξης.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Αυτό θα γίνει προσομοιώνοντας τη διαδικασία που προκύπτει από τον παρακάτω τύπο:

$$\max\left\{0, S(0)\cdot e^{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot \mathrm{T}+\sigma\cdot\sqrt{\mathrm{T}}\cdot\varepsilon} - \mathrm{K}\right\}$$

Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται μέσω του προγράμματος 5.2 :

Πρόγραμμα 5.2

```
% BlsMC.m
function VanillaEuropeanOption=BlsMC(S0,K,r,delta,sigma,T,NRep)
nuT = (r-delta-0.5*sigma^2)*T;
siT = sigma*sqrt(T);
DiscPayoff=exp(-r*T)*max(0,S0*exp(nuT+siT*randn(NRep,1))-K);
[Price, VarPrice, CI]=normfit(DiscPayoff)
```

Οι παράμετροι είναι ίδιοι σύμφωνα με το πρόγραμμα 5.1.

5.2 Αποτίμηση Ευρωπαϊκού Call Option με μέθοδο Αντιθέτων Μεταβλητών (Antithetic Variates)

Όπως είπαμε μπορούμε να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση της εκτίμησής μας. Επειδή η τιμή του option από προσομοίωση Monte Carlo είναι ένας δειγματικός μέσος όρος η τυπική απόκλιση του δείγματος διαιρείται με την τετραγωνική ρίζα του μεγέθους του δείγματος.

Συνεπώς αν αρχικά έχουμε δείγμα n_1 και θέλουμε να μειώσουμε την τυπική απόκλιση στο μισό με ένα μεγαλύτερο δείγμα n_2 θα ισχύει : $\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} \Rightarrow$

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

$n_2 = 4\ n_1$ δηλαδή θα πρέπει να τετραπλασιάσουμε το δείγμα μας.

Ένας τρόπος μείωσης της διασποράς ή διαφορετικά χρησιμοποίησης του ίδιου μεγέθους δείγμα σε σχέση με την απλή μέθοδο Monte Carlo αλλά για πιο αξιόπιστα αποτελέσματα (μικρότερη διασπορά της εκτιμήτριας) είναι η μέθοδος των αντίθετων μεταβλητών. Είδαμε ότι στην απλή μέθοδο Monte Carlo 'γεννήσαμε' παρατηρήσεις από μια τυποποιημένη κανονική κατανομή. Η τυποποιημένη κανονική κατανομή έχει μέσο μηδέν, διακύμανση 1 και είναι συμμετρική. Συνεπώς για κάθε τιμή που γεννάμε υπάρχει μια ίση πιθανότητα να έχουμε γεννήσει την αντίθετη τιμή της. Δηλαδή αν παράγουμε την Ε μπορούμε να παράγουμε και τεχνητά την –Ε. Αυτή είναι η πρακτική πλευρά των αντιθέτων μεταβλητών. Χρησιμοποιούμε ακριβώς τον ίδιο τρόπο με προηγουμένως , όπως θα δούμε παρακάτω για να αποτιμήσουμε ένα option. Η διαδικασία αυτή είναι αυτονόητο ότι αυτόματα διπλασιάζει το δείγμα μας. Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου των αντιθέτων μεταβλητών γίνονται εμφανέστερα σε μικρότερου μεγέθους δείγματα.

Θεωρούμε το πρόβλημα υπολογισμού της Black & Schole τιμής ενός call option ευρωπαϊκού τύπου. Οπωσδήποτε δεν είναι απαραίτητος ο υπολογισμός αυτός μέσω προσομοίωσης αλλά όπως είδαμε και στην προηγούμενη παράγραφο βοηθά στην ευκολότερη κατανόηση της μεθόδου.

Γνωρίζουμε ότι η τιμή της μετοχής δίνεται από τον τύπο:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}\right]$$

ή αν έχουμε και μερίσματα από τον τύπο:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left[(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}\right]$$

Η τιμή τότε του option σύμφωνα και με τον τύπο (5.8) δίνεται από την σχέση:

$$\hat{C}_0 = \exp(-rT)\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\max(0, S_{T,j} - K)$$

Αν λοιπόν στη θέση του ε βάλουμε την τιμή του –ε όπως εξηγήσαμε παραπάνω τότε θα πάρουμε τους αντίστοιχους τύπους:

$$\widetilde{S}_{t+\Delta t} = \widetilde{S}_t \exp\left[(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma \cdot (-\varepsilon) \cdot \sqrt{\Delta t}\right]$$

και

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

$$\widetilde{C}_0 = \exp(-rT)\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\max(0,\widetilde{S}_{T,j} - K).$$

Τελικά η τιμή του option θα δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{C}_{AV} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{M}\frac{\hat{C}_j + \widetilde{C}_j}{2}$$

Επειδή τα $\hat{C}_j$ και $\widetilde{C}_j$ έχουν την ίδια διακύμανση, θα ισχύει:

$$Var\left[\frac{1}{2}\left(\widetilde{C}_j + \widetilde{C}_j\right)\right] = \frac{1}{2}\left[Var(\widetilde{C}_j) + Cov(\hat{C}_j,\widetilde{C}_j)\right]$$

Για το λόγο αυτό $Var(\hat{C}_{AV}) \leq Var(\hat{C})$ αν

$$Cov(\hat{C}_j,\widetilde{C}_j) \leq Var(\hat{C}_j) \qquad (5.9)$$

Επειδή επιλέξαμε αρνητικά συσχετισμένες μεταβλητές (για την ακρίβεια αντίθετες μεταβλητές) η $Cov(\hat{C}_j,\widetilde{C}_j)$ θα είναι αρνητική, συνεπώς ο τύπος (5.9) θα ισχύει πάντα. Καταφέραμε λοιπόν μέσω της μεθόδου αυτής να ελαττώσουμε την διασπορά της εκτίμησής μας.

Το πρόγραμμα που αποτιμά option Ευρωπαϊκού τύπου μέσω της μεθόδου των αντιθέτων μεταβλητών δίνεται παρακάτω:

<u>Πρόγραμμα 5.3</u>

```
% BlsMCAV.m
function [Price, VarPrice, CI] = BlsMCAV(S0,K,r,delta,sigma,T,NRep)
nuT = (r-delta-0.5*sigma^2)*T;
siT = sigma * sqrt(T);
E = randn(NRep,1);
Payoff1 = max(0,S0*exp(nuT+siT*E)-K);
Payoff2 = max(0,S0*exp(nuT+siT*(-E))-K);
DiscPayoff=exp(-r*T)*0.5*(Payoff1+Payoff2);
[Price, VarPrice, CI] = normfit(DiscPayoff)
```


ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Οι παράμετροι είναι ίδιοι σύμφωνα με το πρόγραμμα 5.1.

5.3 Αποτίμηση Ευρωπαϊκού Call Option μέσω τυχαίων μεταβλητών ελέγχου (Control Variates)

Μια άλλη μέθοδο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι οι τυχαίες μεταβλητές ελέγχου (control variate). Η μέθοδος των μεταβλητών ελέγχου είναι ανάμεσα στις πιο ευρέως εφαρμόσιμες μεθόδους, εύκολη στη χρήση και αποτελεσματική σε τεχνικές ελάττωσης διασποράς. Η τυχαία μεταβλητή ελέγχου στην περίπτωση αυτή είναι κατά κάποιο τρόπο ένα option το οποίο συμπεριφέρεται όμοια με αυτό που θέλουμε να αποτιμήσουμε και του οποίου η πραγματική τιμή είναι γνωστή. Στη συνέχεια παίρνουμε προσομοιωμένες τιμές από την τιμή αυτή του option. Η διαφορά μεταξύ της πραγματικής τιμής της μεταβλητής ελέγχου και της προσομοιωμένης τιμής προστίθεται έπειτα στην προσομοιωμένη τιμή του option που θέλουμε να αποτιμήσουμε. Με αυτό τον τρόπο το σφάλμα στην μεταβλητή ελέγχου προστίθεται στην προσομοιωμένη τιμή του option που μας ενδιαφέρει. Πρακτικά η διαδικασία αυτή δουλεύει όπως αναλύεται στη συνέχεια.

Έστω C_S η προσομοιωμένη τιμή του option που θέλουμε να αποτιμήσουμε. Έστω V_t η πραγματική τιμή ενός άλλου παραπλήσιου option και V_S η προσομοιωμένη του τιμή. Η εκτίμηση της μεταβλητής ελέγχου θα δίνεται από τη σχέση $C_S + (V_t - V_S)$. Αυτό που θα πρέπει να κάνουμε είναι να προσομοιώσουμε το $C_S - V_S$ και να προσθέσουμε το V_t. Έτσι θα έχουμε $Var(C_S - V_S) = Var(C_S) + Var(V_S) - 2Cov(C_S, V_S)$. Η διακύμανση που δίνεται από τον παραπάνω τύπο θα είναι μικρότερη από την διακύμανση που είχαμε στην απλή μέθοδο Monte Carlo $Var(C_S)$ αν $Var(V_S) < 2Cov(C_S, V_S)$ δηλαδή αν υπάρχει μεγάλη συνδιακύμανση μεταξύ των C_S και V_S. Αυτή είναι και η υπόθεση στην οποία στηρίζεται η μεταβλητή ελέγχου. Συνεπώς θα πρέπει να επιλεχθεί τέτοια ώστε να είναι υψηλά συσχετισμένη με το option που αποτιμούμε.

Πολλές φορές για να λειτουργήσει καλύτερα η μέθοδος θεωρούμε ότι η τιμή του option που θέλουμε να υπολογίσουμε εξαρτάται από τον αριθμητικό μέσο της μετοχής στην οποία αναφέρεται το option. Έστω P_A αυτή η τιμή.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Έστω επίσης P_G η τιμή ενός option ισοδύναμου του προηγούμενου εκτός από το ότι αντί για αριθμητικό μέσο θα χρησιμοποιήσουμε γεωμετρικό μέσο. Η διαδικασία αυτή παραπέμπει σε ασιατικά option για τα οποία θα μιλήσουμε στη συνέχεια.

Εφαρμόζουμε έπειτα τη μέθοδο μεταβλητής ελέγχου.

Έστω $P_A = E(\hat{P}_A)$ και $P_G = E(\hat{P}_G)$ όπου $\hat{P}_A$ και $\hat{P}_G$ είναι οι προεξοφλημένες τιμές των option για κάποιο προσομοιωμένο path της μετοχής που αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα. Τότε $P_A = P_G + E(\hat{P}_A - \hat{P}_G)$. Ένας αμερόληπτος εκτιμητής του P_A θα είναι το $\hat{P}_A^{CV} = \hat{P}_A + (P_G - \hat{P}_G)$. Το γνωστό λάθος $P_G - \hat{P}_G$ χρησιμοποιείται ως έλεγχος στην εκτίμηση του P_A. Όσον αφορά τη διακύμανση για την οποία ενδιαφερόμαστε, θα ισχύει:

$$Var(\hat{P}_A^{CV}) = Var(\hat{P}_A) + Var(\hat{P}_G) - 2 \cdot Cov[\hat{P}_A, \hat{P}_G]$$

Όπως είδαμε και προηγουμένως για να είναι η μέθοδος αποτελεσματική θα πρέπει η συνδιακύμανση μεταξύ των $\hat{P}_A$ και $\hat{P}_G$ να είναι μεγάλη.

Μια προσεκτικότερη ματιά στον τύπο $\hat{P}_A^{CV} = \hat{P}_A + (P_G - \hat{P}_G)$ αποκαλύπτει ότι η συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ των δύο option δεν χρησιμοποιείται κάπου ώστε να έχουμε καλύτερα αποτελέσματα.

Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια των αμερόληπτων εκτιμητών $\hat{P}_A^{\beta} = \hat{P}_A + \beta \cdot (P_G - \hat{P}_G)$.

Τότε $Var(\hat{P}_A^{\beta}) = Var(\hat{P}_A) + \beta^2 \cdot Var(\hat{P}_G) - 2 \cdot \beta \cdot Cov[\hat{P}_A, \hat{P}_G]$

Το τριώνυμο $\beta^2 \cdot Var(\hat{P}_G) - 2 \cdot Cov[\hat{P}_A, \hat{P}_G] \cdot \beta + Var(\hat{P}_A)$ ελαχιστοποιείται για $\beta^* = \dfrac{Cov[\hat{P}_A, \hat{P}_G]}{Var(\hat{P}_G)}$. Η χρησιμοποίηση του συντελεστή β^* μπορεί να φέρει ακόμα καλύτερα αποτελέσματα ελάττωσης της διασποράς από τη στιγμή που τα $\hat{P}_A$ και $\hat{P}_G$ δεν είναι ασυσχέτιστα.

Το $Cov[\hat{P}_A, \hat{P}_G]$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω n = NPilot επαναλήψεων του προσομοιωμένου ζευγαριού $(\hat{P}_A, \hat{P}_G)$.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS · ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Στην περίπτωση του Ευρωπαϊκού call option μπορεί να θεωρηθεί η τιμή της μετοχής ως η control variate. Η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση του option κατά την ημερομηνία λήξης είναι γνωστά. Για να προχωρήσουμε όπως είπαμε θα πρέπει να υπολογίσουμε την συνδιακύμανση (covariance) μεταξύ της τιμής του option και την τιμή της μετοχής.

Το πρόγραμμα που υπολογίζει την τιμή του option μέσω της μεθόδου αυτής δίνεται παρακάτω:

Πρόγραμμα 5.4

```
% BlsMCCV.m
function [Price, VarPrice, CI] = BlsMCCV(S0,K,r,delta,sigma,T,NRep,NPilot)
nuT=(r-delta-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
% compute parameters first
StockVals = S0*exp(nuT+siT*randn(NPilot,1));
OptionVals = exp(-r*T) * max(0,StockVals-K);
MatCov=cov(StockVals,OptionVals);
VarY = S0^2 * exp(2*(r-delta)*T) * (exp(T*sigma^2)-1);
c = -MatCov(1,2) / VarY;
ExpectedY=S0 * exp((r-delta)*T);
%
NewStockVals=S0*exp(nuT+siT*randn(NRep,1));
NewOptionVals=exp(-r*T) * max(0,NewStockVals-K);
ControlVars=NewOptionVals+c*(NewStockVals-ExpectedY);
[Price, VarPrice, CI]=normfit(ControlVars)
```

Επεξήγηση του προγράμματος

1. function [Price, CI] = BlsMCCV(S0,K,r,delta,sigma,T,NRep,NPilot)

Καθορίζουμε τη συνάρτηση

2. nuT=(r-delta-0.5*sigma^2)*T

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Υπολογίζουμε τη σχέση $(r-\delta-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2)\cdot T$

3. siT=sigma*sqrt(T)

Υπολογίζουμε τη σχέση $\sigma\cdot\sqrt{T}$

4. StockVals = S0*exp(nuT+siT*randn(NPilot,1))

Υπολογίζω NPilot τιμές του

$$S_T = S_0\cdot\exp\left[(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)\cdot T+\sigma\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{T}\right]$$

δηλαδή προσομοιώνω την τιμή της μετοχής για να υπολογίσω τη συνδιακύμανση.

5. OptionVals = exp(-r*T) * max(0,StockVals-K)

Υπολογίζω την τιμή του option $V_T=\exp(-rT)\cdot\max(0,S_T-K)$

6. MatCov=cov(StockVals,OptionVals)

Υπολογίζω τη συνδιακύμανση μεταξύ της τιμής της μετοχής και της τιμής του option.

7. VarY = S0^2 * exp(2*(r-delta)*T) * (exp(T*sigma^2)-1)

Υπολογίζω την διακύμανση της τιμής της μετοχής.

Ισχύει ότι:

Μια τυχαία μεταβλητή X είναι κανονική $N(\mu,\sigma^2)$ κάτω από το μέτρο P αν και μόνο αν $E_P(\exp(\theta\cdot x))=\exp(\theta\cdot\mu+\frac{1}{2}\theta^2\cdot\sigma^2)$.

Εμείς ξέρουμε ότι ε ~ N(0,1) άρα $E_P(\exp(\theta\cdot\varepsilon))=\exp(\frac{1}{2}\theta^2)$ (5.10)

Συνεπώς έχουμε:

$$Var(S_T)=Var(S_0\cdot\exp((r-\delta-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2)\cdot T+\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot\varepsilon))=$$

$$S_0^2\cdot Var(\exp((r-\delta-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2)\cdot T+\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot\varepsilon))=$$

$$S_0^2\cdot\exp(2\cdot(r-\delta-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2)\cdot T)\cdot Var(\exp(\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot\varepsilon))=$$

$$S_0^2\cdot\exp(2\cdot(r-\delta)\cdot T-\sigma^2\cdot T)\cdot\left\{E\left[(\exp(\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot\varepsilon))^2\right]-\left[E(\exp(\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot\varepsilon))\right]^2\right\}=$$

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

$$S_0^2 \cdot \exp(2\cdot(r-\delta)\cdot T-\sigma^2\cdot T)\cdot\left\{E\left[\exp(2\cdot\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot\varepsilon)\right]-\left[E(\exp(\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot\varepsilon))\right]^2\right\} \xrightarrow{=\ (1)}$$

$$S_0^2 \cdot \exp(2\cdot(r-\delta)\cdot T-\sigma^2\cdot T)\cdot\left[\exp(\frac{1}{2}\cdot(2\cdot\sigma\cdot\sqrt{T})^2)-(\exp(\frac{1}{2}\cdot(\sigma\cdot\sqrt{T})^2))^2\right]=$$

$$S_0^2 \cdot \exp(2\cdot(r-\delta)\cdot T-\sigma^2\cdot T)\cdot\left[\exp(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sigma^2\cdot T)-(\exp(\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot T))^2\right]=$$

$$S_0^2 \cdot \exp(2\cdot(r-\delta)\cdot T-\sigma^2\cdot T)\cdot\left[\exp(2\cdot\sigma^2\cdot T)-\exp(\sigma^2\cdot T)\right]=$$

$$S_0^2 \cdot \exp(2\cdot(r-\delta)\cdot T)\cdot\left[\exp(\sigma^2\cdot T)-1\right]$$

8. c = -MatCov(1,2) / VarY

Υπολογίζω τον συντελεστή $c=-\dfrac{Cov[\hat{V}_T,\hat{S}_T]}{Var(S_T)}$

9. ExpectedY=S0 * exp((r-delta)*T)

Υπολογίζω την αναμενόμενη τιμή της μετοχής S_T

$$E(S_T)=E(S_0\cdot\exp((r-\delta-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2)\cdot\mathrm{T}+\sigma\cdot\sqrt{\mathrm{T}}\cdot\varepsilon)=$$

$$S_0\cdot E(\exp((r-\delta-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2)\cdot\mathrm{T}+\sigma\cdot\sqrt{\mathrm{T}}\cdot\varepsilon)=$$

$$S_0\cdot\exp((r-\delta-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2)\cdot\mathrm{T})\cdot E(\exp(\sigma\cdot\sqrt{\mathrm{T}}\cdot\varepsilon)) \xrightarrow{=\ (1)}$$

$$S_0\cdot\exp((r-\delta-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2)\cdot\mathrm{T})\cdot\exp(\frac{1}{2}\cdot(\sigma\cdot\sqrt{\mathrm{T}})^2)=$$

$$S_0\cdot\exp((r-\delta)\cdot T-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot T)\cdot\exp(\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot T)=$$

$$S_0\cdot\exp((r-\delta)\cdot T)$$

10. NewStockVals=S0*exp(nuT+siT*randn(NRep,1))

Υπολογίζω NRep τιμές του

$$S_T=S_0\cdot\exp\left[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\cdot T+\sigma\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{T}\right]$$

δηλαδή προσομοιώνω την τιμή της μετοχής για να εφαρμόσω εντέλει τη μέθοδο της μεταβλητής ελέγχου.

11. NewOptionVals=exp(-r*T) * max(0,NewStockVals-K)

Υπολογίζω τη νέα τιμή του option $V_T=\exp(-rT)\cdot\max(0,S_T-K)$

12. ControlVars=NewOptionVals+c*(NewStockVals-ExpectedY)

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Υπολογίζω τη μεταβλητή που θέλω $C_S + (V_t - V_S)$

13. [Price, VarPrice, CI]=normfit(ControlVars)

Παίρνουμε τα αποτελέσματα που χρειαζόμαστε. Τιμή του option, διακύμανση και διάστημα εμπιστοσύνης.

5.4 Σύγκριση των μεθόδων

Είδαμε λοιπόν ως τώρα τον υπολογισμό Vanilla call option (απλό Ευρωπαϊκό call option) με τη μέθοδο Monte Carlo και συγκεκριμένα με την απλή μέθοδο, την μέθοδο αντιθέτων μεταβλητών (antithetic variates) και με τη μέθοδο τυχαίας μεταβλητής ελέγχου (control variate).

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η αποτίμηση τους σε εφαρμογή θεωρώντας τα παρακάτω δεδομένα:

Τρέχουσα τιμή μετοχής : 100 Euro

Τιμή Εκτέλεσης : 100 Euro

Επιτόκιο αγοράς : 10% = 0.1

Χρόνος ως την λήξη του option : 1 έτος

Μεταβλητότητα μετοχής (volatility) : 20% = 0.2

Μέρισμα : 4% = 0.04

Το σημαντικότερο από αυτά που παρατηρούμε από τον παρακάτω πίνακα είναι ότι και οι τρεις μέθοδοι συγκλίνουν στην τιμή των Black & Scholes. Το γεγονός αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς όπως είχαμε αναφέρει ο σωστός τρόπος υπολογισμού Ευρωπαϊκού call option είναι μέσω του τύπου των Black & Scholes. Αποδείξαμε όμως ότι οι μέθοδοι αυτοί δουλεύουν σωστά και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε περιπτώσεις όπου είναι αδύνατη η εφαρμογή του τύπου των Black & Scholes όπως θα δούμε παρακάτω. Ένα άλλο σημείο το οποίο πρέπει να τονίσουμε είναι ότι οι μέθοδοι αντιθέτων μεταβλητών και τυχαίων μεταβλητών ελέγχου έδωσαν μικρότερη διασπορά στις εκτιμήσεις. Για το λόγο αυτό άλλωστε ονομάζονται τεχνικές ελάττωσης διασποράς.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Μέγεθος δείγματος-Αριθμός επαναλήψεων	Formula των Black & Scholes	Monte Carlo			Antithetic Variate			Control Variate		
	Τιμή	Τιμή	Διακύμανση	Διάστημα εμπιστοσύνης	Τιμή	Διακύμανση	Διάστημα εμπιστοσύνης	Τιμή	Διακύμανση	Διάστημα εμπιστοσύνης
1.000	10.5586	10.8156	14.6058	10.5293 11.1019	10.3658	6.5058	9.9621 10.7695	10.6273	5.3918	10.2927 10.9619
10.000	10.5586	10.5755	14.4840	10.4858 10.6653	10.4977	6.9916	10.3607 10.6348	10.4976	5.2126	10.3954 10.5997
100.000	10.5586	10.5478	14.4075	10.5195 10.5760	10.5886	7.0494	10.5449 10.6323	10.5632	5.3204	10.5302 10.5962
1.000.000	10.5586	10.5601	14.2678	9.6747 11.4455	10.5591	6.9960	10.5454 10.5728	10.5719	5.3480	10.5614 10.5823

<u>Πίνακας 5.1</u>

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

5.5 Ασιατικά options (ή Average-Rate Options) - (Παρουσίαση και Αποτίμηση)

Είναι options τα οποία συναντώνται κυρίως σε νομίσματα, πετρέλαιο και πολύτιμα μέταλλα. Όπως υποδηλώνει και το όνομά τους είναι δικαιώματα αγοράς (calls) ή πώλησης (puts) των αγαθών στη μέση τους τιμή μετρημένη σε κάποια ορισμένη χρονική περίοδο.

Είναι φανερό ότι η μέση τιμή είναι λιγότερο ασταθής (έχει μικρότερη διασπορά) απ' ότι η ίδια τιμή του αξιόγραφου, οπότε τα ασιατικά options θα έχουν μικρότερη αξία από τα κανονικά options. Όμοια όσο πιο συχνά υπολογίζεται ο μέσος όρος , τόσο μικρότερη είναι η διασπορά. Για παράδειγμα, ο καθημερινός μέσος όρος παρουσιάζει μικρότερη αστάθεια απ' ότι ο εβδομαδιαίος και αυτομάτως έχουμε μικρότερη αξία για το option.

Τα ασιατικά option έχουν μια ισχυρή εξάρτηση από το path καθώς η αποτίμησή τους εξαρτάται από το μέσο όρο των τιμών της μετοχής κατά τη διάρκεια ζωής του option. Μπορούν λοιπόν να θεωρηθούν διαφορετικής μορφής option ανάλογα με το πώς θα υπολογιστεί ο μέσος όρος. Μπορούμε δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε αριθμητικό ή γεωμετρικό μέσο. Ανάλογα αν δουλεύουμε σε διακριτό ή σε συνεχή χρόνο οι τύποι θα είναι αντίστοιχα :

Διακριτός χρόνος

Αριθμητικός μέσος : $A_{da} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i)$ i=1,...,n

Γεωμετρικός μέσος : $A_{dg} = \left[\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right]^{\frac{1}{n}}$ i=1,...,n

Συνεχής χρόνος

Αριθμητικός μέσος : $A_{ca} = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt$

Γεωμετρικός μέσος : $A_{cg} = \exp\left[\frac{1}{T}\int_0^T \ln S(t)dt\right]$

Για την αξιολόγηση των ασιατικών options το διωνυμικό μοντέλο είναι δύσκολο να εφαρμοστεί, καθώς οι κόμβοι διπλασιάζονται σε κάθε χρονική περίοδο και έτσι το

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

διωνυμικό διάγραμμα επεκτείνεται σε δυνάμεις του 2. Για 10 χρονικές περιόδους έχουμε 1024 δυνατά αποτελέσματα, ενώ για 15 έχουμε 32768 και για 20 έχουμε 1048576.

Επειδή ούτε το μοντέλο των Black & Scholes μπορεί να εφαρμοστεί, γίνεται αντιληπτό ότι η χρήση μεθόδων Monte Carlo κρίνεται επιτακτική. Βλέπουμε λοιπόν μια περίπτωση όπου η μέθοδος Monte Carlo είναι σημαντική καθώς στα προηγούμενα παραδείγματα Ευρωπαϊκού call option μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο των Black & Scholes.

Για να δούμε λοιπόν τη μέθοδο αποτίμησης θα θεωρήσουμε ένα Ασιατικό call option για το οποίο χρησιμοποιείται διακριτός αριθμητικός μέσος. Η τιμή του option θα είναι στην περίπτωση αυτή

$$\max\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S(t_i) - X, 0\right\} \tag{5.11}$$

όπου η διάρκεια του option είναι T έτη, $t_i = i \cdot \delta t$ και δt=T/N

Στη συνέχεια ακολουθεί το πρόγραμμα που εκτελεί τη διαδικασία αυτή.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Πρόγραμμα 5.5

```
% AsianMC.m
function [Price, VarPrice, CI]=AsianMC(S0,K,r,delta,sigma,T,NSamples,NRep)
Payoff=zeros(NRep,1);
for i=1:NRep
   SPaths=zeros(1,NSamples+1);
   SPaths(1,1)=S0;
   dt=T/NSamples;
   nudt=(r-delta-0.5*sigma^2)*dt;
   sidt=sigma*sqrt(dt);
   for j=1:NSamples
      SPaths(1,j+1)=SPaths(1,j)*exp(nudt+sidt*randn);
   end
   Payoff(i)=max(0,mean(SPaths)-K);
end
[Price, VarPrice, CI]=normfit(exp(-r*T)*Payoff)
```

Η παράμετρος NSamples είναι ο αριθμός των τιμών της μετοχής που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του μέσου όρου σύμφωνα με τον ορισμό του ασιατικού option. Αποτελεί δηλαδή το μέγεθος του N στον τύπο (5.11). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι όμοιες με των υπολοίπων προγραμμάτων που καταγράφηκαν.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να βελτιωθεί με control variates καθώς όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενη ενότητα αποτελεί μέθοδο ελάττωσης της διασποράς της εκτίμησης. Ως control variate μπορούμε να θεωρήσουμε το άθροισμα των ακόλουθων τιμών των μετοχών:

$$Y = \sum_{i=0}^{N} S(t_i)$$

Είναι κατάλληλη control variate καθώς είναι καθαρά συσχετισμένη με το payoff του option και μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενή του τιμή (κάτω από το risk-neutral measure) :

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

$$E[Y]=E\left[\sum_{i=0}^{N}S(t_i)\right]=\sum_{i=0}^{N}E\left[S(i\delta t)\right]=\sum_{i=0}^{N}S(0)e^{(r-\delta)i\delta t}=$$

$$=S(0)\sum_{i=0}^{N}\left[e^{(r-\delta)\delta t}\right]^{i}=S(0)\frac{1-e^{(r-\delta)(N+1)\delta t}}{1-e^{(r-\delta)\delta t}}$$

Το πρόγραμμα 5.6 αποτιμά το Ασιατικό option μέσω της μεθόδου αυτής:

<u>Πρόγραμμα 5.6</u>

```
%AsianMCCV.m
function [Price, VarPrice, CI]=AsianMCCV(S0,K,r,delta,sigma,T,NSamples,NRep,NPilot)
%pilot replications to set control parameter
TryPath=zeros(NPilot,NSamples+1);
TryPath(:,1)=S0;
dt=T/NSamples;
nudt=(r-delta-0.5*sigma^2)*dt;
sidt=sigma*sqrt(dt);
for i=1:NPilot
   for j=1:NSamples
      TryPath(i,j+1)=TryPath(i,j)*exp(nudt+sidt*randn);
   end
end
StockSum=sum(TryPath,2);
PP=mean(TryPath(:,2:(NSamples+1)),2);
TryPayoff=exp(-r*T)*max(0,PP-K);
MatCov=cov(StockSum,TryPayoff);
c=-MatCov(1,2)/var(StockSum);
```


ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

```
dt=T/NSamples;
ExpectedSum=S0*(1-exp((NSamples+1)*(r-delta)*dt))/(1-exp((r-delta)*dt));
%MC run
ControlVars=zeros(NRep,1);
for i=1:NRep
   StockPath=zeros(1,NSamples+1);
   StockPath(1,1)=S0;
   dt=T/NSamples;
   nudt=(r-delta-0.5*sigma^2)*dt;
   sidt=sigma*sqrt(dt);
   for j=1:NSamples
      StockPath(1,j+1)=StockPath(1,j)*exp(nudt+sidt*randn);
   end
   Payoff=exp(-r*T)*max(0,mean(StockPath(2:(NSamples+1)))-K);
   ControlVars(i)=Payoff+c*(sum(StockPath)-ExpectedSum);
end
[Price, VarPrice, CI]=normfit(ControlVars)
```

Οι παράμετροι που απαιτούνται για την αποτίμηση του Ασιατικού option είναι όμοιοι με των προηγούμενων προγραμμάτων.

Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να αποτιμήσουμε ασιατικά option αριθμητικού μέσου με τη μέθοδο control variate είναι να χρησιμοποιήσουμε ως μεταβλητή ελέγχου το αντίστοιχο ασιατικό option γεωμετρικού μέσου.

Θα αποτιμήσουμε λοιπόν ασιατικό call option αριθμητικού μέσου. Το option αυτό πληρώνει τη διαφορά, αν είναι θετική, μεταξύ αριθμητικού μέσου της τιμής της μετοχής A_T και της τιμής εκτέλεσης K στην ημερομηνία λήξης T. O αριθμητικός μέσος λαμβάνεται σε ένα σύνολο παρατηρήσεων της τιμής της μετοχής $S(t_i)$ (η οποία ικανοποιεί το μοντέλο γεωμετρικής κίνησης Brown) τις χρονικές στιγμές t_i $\quad i = 1,2,\ldots,N$.

Η τιμή του option τη χρονική στιγμή λήξης του, θα είναι max(0, A_T -K).

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Δεν υπάρχει αναλυτική λύση για την τιμή του ασιατικού option με αριθμητικό μέσο, υπάρχει όμως για την τιμή ασιατικού option με γεωμετρικό μέσο.

Το γεωμετρικό ασιατικό call option πληρώνει τη διαφορά αν είναι θετική μεταξύ του γεωμετρικού μέσου της τιμής της μετοχής S_T και της τιμής εκτέλεσης K στην ημερομηνία λήξης T. Ο γεωμετρικός μέσος όπως είδαμε παραπάνω ορίζεται ως:

$$G_T = \left[\prod_{i=1}^{N} S(t_i) \right]^{\frac{1}{N}} .$$

Επειδή ο γεωμετρικός μέσος είναι το γινόμενο λογαριθμικά κανονικών κατανομών τότε είναι ακολουθεί και ο ίδιος λογαριθμική κανονική κατανομή. Έτσι η τιμή του γεωμετρικού ασιατικού call option δίνεται από τον τύπο των Black & Scholes, κατάλληλα τροποποιημένο. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$C_{GEOMETRIC\_ASIAN} = \exp(-r \cdot T) \cdot (\exp(a + \frac{1}{2} \cdot b) \cdot N(x) - K \cdot N(x - \sqrt{b})$$

όπου

$$a = \ln(G_t) + \frac{N-m}{N} \cdot (\ln(S) + v \cdot (t_{m+1} - t) + \frac{1}{2} \cdot v \cdot (T - t_{m+1}))$$

$$b = \frac{(N-m)^2}{N^2} \cdot \sigma^2 \cdot (t_{m+1} - t) + \frac{\sigma^2 \cdot (T - t_{m+1})}{6 \cdot N^2} \cdot (N - m \cdot (2(N-m) - 1)$$

$$v = r - \delta - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2$$

$$x = \frac{a - \ln(K) + b}{\sqrt{b}}$$

όπου S_T ο τρέχον γεωμετρικός μέσος και m η τελευταία γνωστή τιμή.

Το πρόγραμμα 5.7 εκτελεί τη διαδικασία αυτή, δηλαδή εκτιμά το ασιατικό option αριθμητικού μέσου με control variate ασιατικό option γεωμετρικού μέσου.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

Πρόγραμμα 5.7

```
%AsianMCCVG.m
function [Price, VarPrice, CI]=AsianMCCVG(S0,K,r,delta,sigma,T,NSamples,NRep,NPilot)
%pilot replications to set control parameter
TryPath=zeros(NPilot,NSamples+1);
TryPath(:,1)=S0;
dt=T/NSamples;
nudt=(r-delta-0.5*sigma^2)*dt;
sidt=sigma*sqrt(dt);
for i=1:NPilot
   for j=1:NSamples
      TryPath(i,j+1)=TryPath(i,j)*exp(nudt+sidt*randn);
   end
end
StockProduct=prod(TryPath.^(1/(NSamples+1)),2);
PP=mean(TryPath(:,2:(NSamples+1)),2);
TryPayoff=exp(-r*T)*max(0,PP-K);
MatCov=cov(StockProduct,TryPayoff);
c=-MatCov(1,2)/var(StockProduct);
ExpectedProduct=mean(StockProduct);
%MC run
ControlVars=zeros(NRep,1);
for i=1:NRep
   StockPath=zeros(1,NSamples+1);
   StockPath(1,1)=S0;
   for j=1:NSamples
      StockPath(1,j+1)=StockPath(1,j)*exp(nudt+sidt*randn);
   end
   Payoff=exp(-r*T)*max(0,mean(StockPath(2:(NSamples+1)))-K);
   ControlVars(i)=Payoff+c*(prod(StockPath.^(1/(NSamples+1)),2)-ExpectedProduct);
end
[Price, VarPrice, CI]=normfit(ControlVars)
```


ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Κεφάλαιο 6

Εκτίμηση της μεταβλητότητας (volatility)

ΕΝΟΤΗΤΕΣ :

- **Είδη μεταβλητότητας (volatility)**
- **Historical Volatility**
- **Implied Volatility**
- **Stochastic Volatility**
- **Εφαρμογή για Historical Volatility & Stochastic Volatility**

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

6.1 Είδη μεταβλητότητας (Volatility)

Όπως είδαμε ως τώρα κάθε φορά που τρέχαμε τα προγράμματα θεωρούσαμε την τιμή της μεταβλητότητας της μετοχής (volatility) ως δεδομένη. Υπάρχουν τρεις τρόποι με τους οποίους μπορούμε να έχουμε τιμές για τη μεταβλητότητα μιας μετοχής ή οποιασδήποτε άλλης αξίας στην οποία αναφέρεται το Option. Συγκεκριμένα υπάρχουν οι εξής:

1) Ιστορική διακύμανση (Historical Volatility)
2) Συνεπαγόμενη διακύμανση (Implied Volatility)
3) Στοχαστική διακύμανση (Stochastic Volatility)

6.2 Historical Volatility

Η historical volatility (ετήσια) υπολογίζεται μέσω των δεδομένων που έχουμε συλλέξει για τις προηγούμενες τιμές της μετοχής ή γενικότερα τις τιμές του στοιχείου στο οποίο αναφέρεται το option.

Από την ενότητα 3, τύπος 3.6 έχουμε ότι $d(\log S_t) = \sigma \cdot d\widetilde{W}_t + (r - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2) \cdot dt$. Συνεπώς οι μικρές αλλαγές του $\log S_t$ που δίνονται από το διαφορικό, ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο $(r - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2)$ και διακύμανση $\sigma^2 \cdot dt$. Αν θεωρήσουμε το διακριτό χρόνο τότε θα ισχύει :

$$\Delta(\log S_t) = \log S_{t+1} - \log S_t = \log \frac{S_{t+1}}{S_t} \sim \mathrm{N}(r - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2, \sigma^2 \Delta t) \qquad (6.1)$$

όπου $\Delta t = \frac{1}{M}$

με Μ να συμβολίζει τον αριθμό των ημερών του έτους.

Το $\log \frac{S_{t+1}}{S_t}$ ονομάζεται return και στη συνέχεια θα συμβολίζουμε

$$r_{t+1} = \log \frac{S_{t+1}}{S_t} \qquad (6.2)$$

ή

$$r_t = \log \frac{S_t}{S_{t-1}} \qquad (6.3)$$

Βρίσκουμε τη δειγματική τυπική απόκλιση του r_t η οποία θα είναι:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{N}(r_t - \bar{r})^2}{N-1}} \quad \text{, όπου } \bar{r} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} r_t \,.$$

Το σ_r θα είναι η ημερήσια εκτίμηση της volatility. Συγκρίνοντας τους τύπους (6.1) και (6.3) βρίσκουμε ότι $\sigma_r = \sigma \cdot (\Delta t)^2 = \sigma \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{M}}\right)^{1/2} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\mathrm{M}} \cdot \sigma_r$.

Για πιο σωστή εκτίμηση θα πρέπει στη θέση του M να θεωρήσουμε τις ημέρες συναλλαγής (trading day) σε ένα έτος.

Στη συνέχεια (ενότητα 6.5) θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα εκτίμησης της historical volatility.

6.3 Implied Volatility

Η τιμή της implied volatility στην περίπτωση αυτή προκύπτει από το μοντέλο των Black & Scholes.

Συγκεκριμένα βλέπουμε την τιμή του call option στην αγορά και την αντικαθιστούμε στον τύπο αποτίμησης call option των Black & Scholes που είδαμε στο κεφάλαιο 3 :

$$V(s,T) = s \cdot \Phi\left(\frac{\log\frac{s}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\cdot \mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}\right) - \mathrm{K}\cdot e^{-rt} \cdot \Phi\left(\frac{\log\frac{s}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\cdot \mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}\right)$$

Λύνοντας ως προς σ προκύπτει η τιμή της implied volatility.

Ανάλογα κινούμαστε και στην περίπτωση που πρόκειται για put option.

Για τον υπολογισμό της μέσω του προγράμματος MATLAB η εντολή είναι ως ακολούθως:

Πρόγραμμα 6.1

Black-Scholes implied volatility

Volatility = blsimpv(Price, Strike, Rate, Time, Call, MaxIterations)

όπου

Price : Τρέχουσα τιμή μετοχής

Strike : Τιμή εξάσκησης του option (exercise price)

Rate : Επιτόκιο αγοράς (εισάγεται ως δεκαδικός αριθμός π.χ. 10% → 0.01)

Time : Χρόνος ως την ημερομηνία λήξης του option σε έτη

Call : Η τιμή του call option

MaxIterations : (Προαιρετικό) Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση στη εξίσωση της Volatility με τη μέθοδο του Newton (προεπιλεγμένο-default =50)

6.4 Stochastic Volatility

Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι σε κάθε ημέρα συναλλαγής η volatility της μετοχής δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο. Ένας τρόπος μοντελοποίησης της μεταβολής της volatility σε σχέση με το χρόνο πραγματοποιείται μέσω της μεθόδου GARCH[3] (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). Η stochastic volatility η οποία είναι η διακύμανση που μεταβάλλεται με το χρόνο υπολογίζεται μέσω μοντέλων GARCH.

Η μέθοδος GARCH λειτουργεί ως εξής:

Έστω μεταβλητή n_t η οποία συμβολίζει τον αριθμό των ημερών που έχουν περάσει από την προηγούμενη τιμή κλεισίματος. Θεωρούμε ότι η τιμή κλεισίματος πραγματοποιείται την Παρασκευή οπότε τη Δευτέρα θα ισχύει n_t=3, την Τρίτη n_t=4 κ.ο.κ.. Αν οι μέρες στις οποίες πραγματοποιούνται συναλλαγές (trading days) και οι μέρες στις οποίες δεν πραγματοποιούνται συναλλαγές (non-trading days) ήταν εξίσου υπεύθυνες για την μεταβλητότητα των μετοχών (volatility) τότε θα ήταν λογικό να πολλαπλασιάσουμε την πρόβλεψη της διακύμανσης μιας ημέρας με n_t. Ισοδύναμα

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

επειδή η volatility υπολογίζεται μέσω μοντέλων GARCH και βασίζεται σε προηγούμενες προβλέψεις, αυτές θα πρέπει να μετατραπούν σε περίοδο μιας ημέρας διαιρώντας με n_{t-1}. Θεωρώντας ότι οι ημέρες μη-συναλλαγής επηρεάζουν μόνο ένα μέρος της volatility των ημερών συναλλαγής, συμβολίζουμε με d έναν εκθέτη ο οποίος μετρά τον μέσο όρο της έντασης της volatility ως ποσοστό ανά ημέρα για όλο το διάστημα ως την προηγούμενη μέρα κλεισίματος και μέσω του παράγοντα n_t^d ρυθμίζουμε την volatility στο διάστημα που υπολογίζουμε.

Στην περίπτωσή μας θα θεωρήσουμε για τη σειρά των returns το μοντέλο:

$r_t = a_0 + a_1 \cdot r_{t-1} + \varepsilon_t$ όπου r_t τα returns της μετοχής και ε_t το σφάλμα του μοντέλου τη χρονική στιγμή t.

Από το GARCH μοντέλο θα πάρουμε:

$$\frac{h_t}{n_t^d} = b_0 + b_1 \frac{\varepsilon_{t-1}^2}{n_{t-1}^d} + b_2 \frac{h_{t-1}}{n_{t-1}^d}$$

όπου h_t η volatility τη χρονική στιγμή t.

Θα πρέπει να εκτιμήσουμε και να προβλέψουμε τη διακύμανση για κάθε ημέρα χρησιμοποιώντας δεδομένα διαθέσιμα ως εκείνη τη χρονική στιγμή. Για το λόγο αυτό για κάθε ημέρα το μοντέλο Garch εκτιμάται από τη μέγιστη πιθανοφάνεια χρησιμοποιώντας την διαθέσιμη πληροφορία των προηγούμενων returns.

Όπως σε κάθε μη-γραμμική εκτίμηση, πρέπει να θεωρήσουμε μια αρχική εκτίμηση για τις παραμέτρους και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τις τιμές της προηγούμενης ημέρας.

Από τη στιγμή που εκτιμούνται οι νέες παράμετροι χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη της volatility για την υπόλοιπη 'ζωή' του option.

Η πρόβλεψη της διακύμανσης μέσω Garch μοντέλων δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

$$\frac{h_{t+1,t}}{n_{t+1}^{d}} = b_0 + b_1 \frac{\varepsilon_t^2}{n_t^d} + b_2 \frac{h_t}{n_t^d}$$

$$\frac{h_{t+i,t}}{n_{t+i}^{d}} = b_0 + b_1 E\left[\frac{\varepsilon_{t+i-1}^2}{n_{t+i-1}^d} / \Omega_t\right] + b_2 \frac{h_{t+i-1}}{n_{t+i-1}^d} =$$

$$= b_0 + b_1 \frac{h_{t+i-1}}{n_{t+i-1}^d} + b_2 \frac{h_{t+i-1}}{n_{t+i-1}^d} \qquad \text{i} = 2,3,\ldots,\text{T}$$

όπου $h_{t+i,t}$ η πρόβλεψη του h_{t+i} τη χρονική στιγμή t .

Οι προβλέψεις των τιμών των put και call options της επόμενης ημέρας συναλλαγής (trading day), βασισμένες στις προβλέψεις της volatility και στις τιμές κλεισίματος του στοιχείου στο οποίο αναφέρεται το option, υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τον τύπο αποτίμησης options των Black & Scholes:

Call option : $C_{t+1,t}^{(T)} = S_t \cdot e^{-\delta_t T} N(d_1) - K \cdot e^{-r_t T} N(d_2)$

Put option : $P_{t+1,t}^{(T)} = S_t \cdot e^{-\delta_t T} \left[N(d_1) - 1\right] + K \cdot e^{-r_t T} \left[1 - N(d_2)\right]$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left[r_t - \delta_t + \frac{1}{2}\left(\sigma_{t+1,t}^{(T)}\right)^2\right]}{\sigma_{t+1,t}^{(T)} \cdot \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{t+1,t}^{(T)} \cdot \sqrt{T}$$

όπου : T η ημερομηνία λήξης του option

S_t η τιμή κλεισίματος της μετοχής

K η τιμή εκτέλεσης-εξάσκησης

r_t το επιτόκιο αγοράς

δ_t η μερισματική απόδοση

και $\sigma_{t+1,t}^{(T)} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{i=2}^{T+1} h_{t+i,t}}$ η πρόβλεψη που γίνεται τη χρονική στιγμή t, του μέσου όρου της διακύμανσης (volatility) από το t+1 ως την ημερομηνία λήξης του option.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Το πρόγραμμα το οποίο αποτιμά την τιμή ενός option με stochastic volatility δίνεται στη συνέχεια.

Πρόγραμμα 6.2

```
% OptionPriceStochasticVol.m
function [Price, VarPrice, CI]=OptionPriceStochasticVol(S0,K,r,delta,T,NSteps,NRep,data,p,q)
garchpq(data,p,q);
parameters=ans
[simulatedata , H]=garchsimulate(NSteps,parameters,p,q);
CPaths = zeros(NRep, 1);
SPaths = zeros(NRep, 1+NSteps);
SPaths(:,1)=S0;
dt = T/NSteps;
for i=1:NRep
   for j=1:NSteps
      SPaths(i,j+1)=SPaths(i,j)*exp((r-delta-0.5*H(j,1))*dt + (H(j,1).^(1/2))*sqrt(dt)*randn);
      CPaths(i,1)=exp(-r*T)*max(SPaths(i,NSteps+1)-K,0);
   end
end
[Price, VarPrice, CI]=normfit(CPaths)
```

όπου:

S0: η τρέχουσα τιμή της μετοχής

K: η τιμή εκτέλεσης του δικαιώματος

r: το επιτόκιο αγοράς

delta: η μερισματική απόδοση

T: χρόνος ως τη λήξη του option

NSteps: ημέρες ως τη λήξη του option (ή ο αριθμός διαστημάτων που χωρίζουμε την περίοδο ως τη λήξη του option)

NRep: ο αριθμός επαναλήψεων -προσομοιώσεων της διαδικασίας

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

data: τα δεδομένα (returns)

p, q: η τάξη του GARCH μοντέλου

Θα πρέπει να σημειωθεί πως για το συγκεκριμένο πρόγραμμα ήταν απαραίτητες κάποιες ρουτίνες για το πρόγραμμα MATLAB οι οποίες δεν είναι διαθέσιμες από το συγκεκριμένο λογισμικό. Οι ρουτίνες αυτές είναι διαθέσιμες από το UCSD_Garch toolbox for Matlab[4]. Συγκεκριμένα οι ρουτίνες οι οποίες είναι απαραίτητες είναι οι:

garchpq.m – garchsimulate.m – garchcore.m – garchgrad.m – garchlikelihood.m.

Η ρουτίνα garchpq υπολογίζει τις παραμέτρους του μοντέλου GARCH με δεδομένα τα returns των μετοχών, τα οποία έχουν μέσο μηδέν και ακολουθούν κανονική κατανομή. Οι εκτιμήσεις για τους συντελεστές του GARCH(P, Q) μοντέλου δίνουν την εκάστοτε τιμή της διακύμανσης σύμφωνα με τον τύπο :

$$h_t = c + a_1 r_{t-1}^2 + a_2 r_{t-2}^2 + \dots + a_p r_{t-p}^2 + b_1 h_{t-1} + b_2 h_{t-2} + \dots + b_q h_{t-q}$$

Αν δηλαδή επιλέξουμε (2,2) μοντέλο θα πάρουμε τις εκτιμήσεις των πέντε παραμέτρων.

Η ρουτίνα garchsimulate προσομοιώνει το μοντέλο αυτό ώστε να μας δώσει εκτίμηση-πρόβλεψη για τις μελλοντικές volatility. Οι υπόλοιπες ρουτίνες λειτουργούν υποβοηθητικά στις δύο που περιγράψαμε.

6.5 Εφαρμογή Historical Volatility & Stochastic Volatility

Θα αποτιμήσουμε options χρησιμοποιώντας historical και stochastic volatility. Τα options αυτά θα στηρίζονται στις τιμές συναλλάγματος του Αμερικανικού δολαρίου (USD) έναντι του Γερμανικού μάρκου (DEM), της Βρετανικής λίρας (GBP), του Ιαπωνικού γεν (JPY), του Γαλλικού φράγκου (FRF), του Καναδικού δολαρίου (CAD) και της Ισπανικής πεσέτας (ESP). Τα δεδομένα τα οποία είναι διαθέσιμα έχουν ληφθεί για την περίοδο 12/31/1987 έως 01/01/1999. Η εκτίμηση για την τιμή των options θα γίνει για ένα έτος αργότερα, δηλαδή για ημερομηνία λήξης 01/01/2000.

Ως τρέχουσες τιμές θα θεωρηθούν οι τιμές στην αγορά συναλλάγματος την ημερομηνία 01/01/1999 οι οποίες παρουσιάζονται στον πίνακα 6.1.

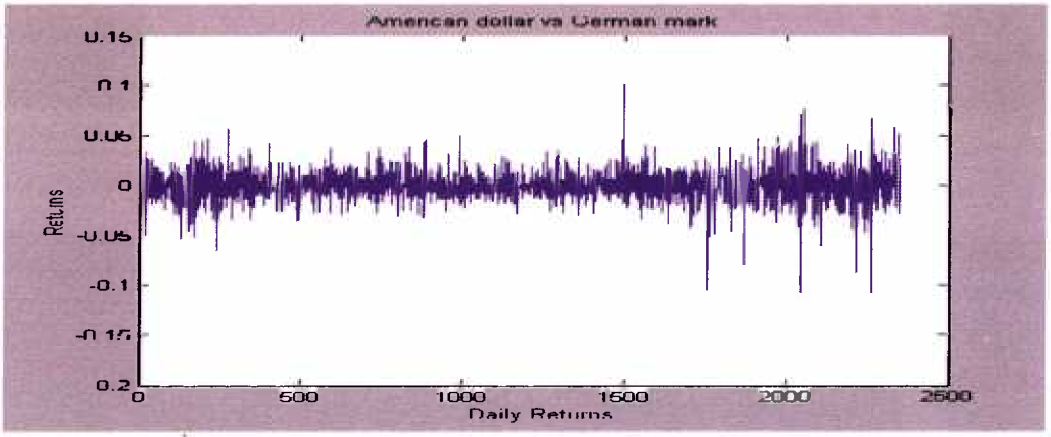
UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

Πίνακας 6.1

1 USD	1,6690	DEM
1 USD	0,597	GBP
1 USD	115,4	JPY
1 USD	5,595	FRF
1 USD	1,555	CAD
1 USD	142	ESP

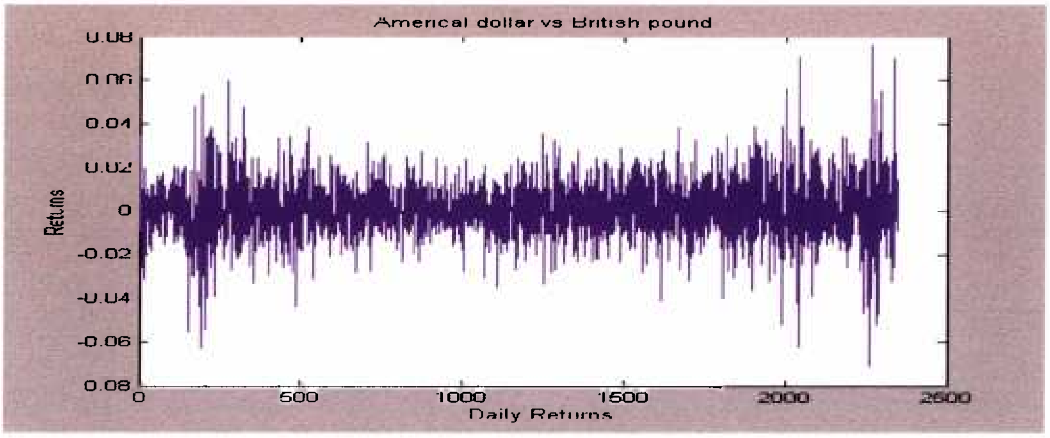
Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται τα returns των τιμών του συναλλάγματος των νομισμάτων που περιγράφηκαν παραπάνω σε σχέση με το Αμερικανικό δολάριο. Όπως παρατηρούμε δεν υπάρχει σταθερή volatility γεγονός που δείχνει ότι η χρησιμοποίηση της stochastic volatility αποτελεί πιο ορθολογική λύση έναντι της historical volatility.

Διάγραμμα 6.1

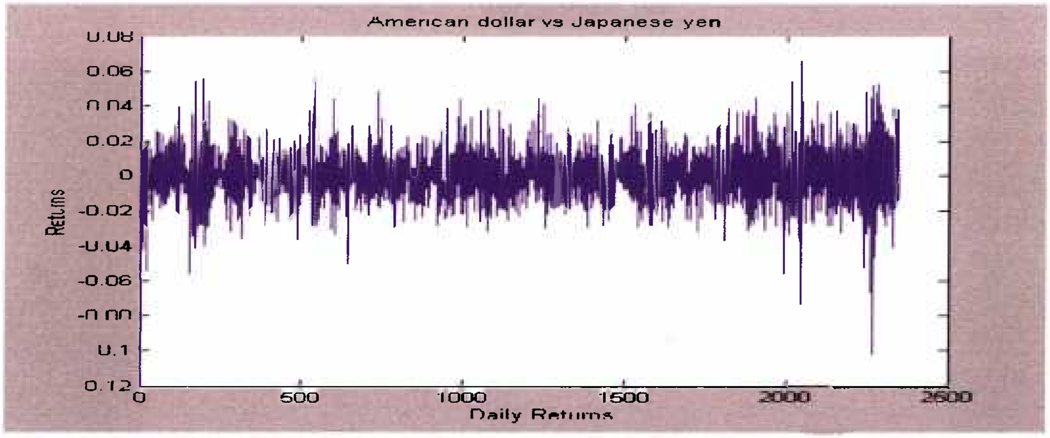


UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

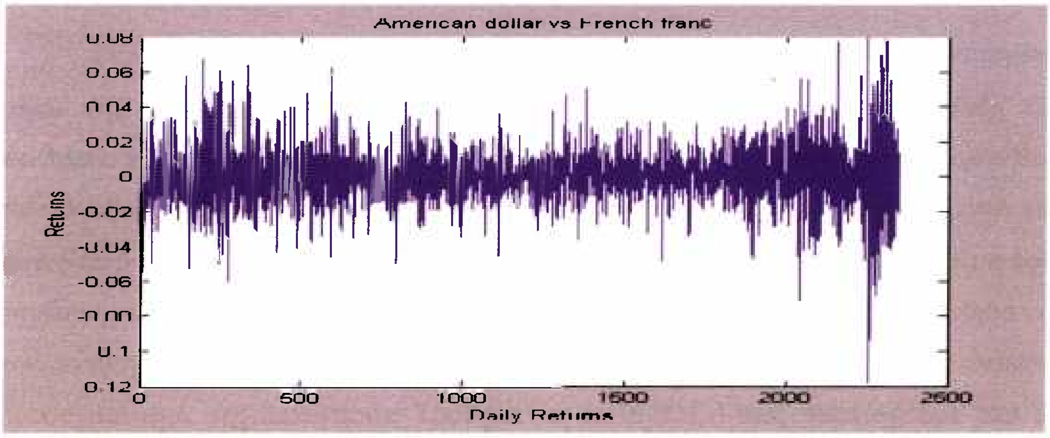
Διάγραμμα 6.2



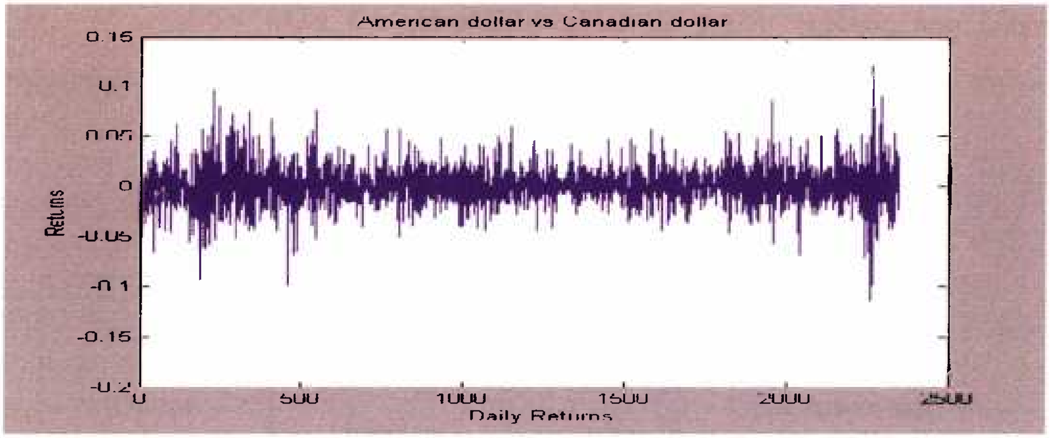
Διάγραμμα 6.3



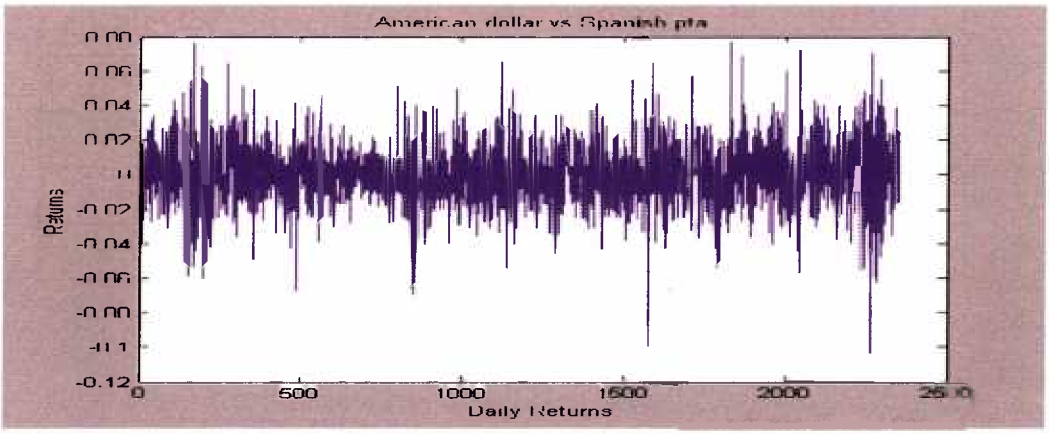
Διάγραμμα 6.4



Διάγραμμα 6.5



Διάγραμμα 6.6



Στον παρακάτω πίνακα υπολογίζουμε την τιμή για κάθε option υπολογισμένο μέσω της απλή μεθόδου Monte Carlo χρησιμοποιώντας historical volatility και stochastic volatility. Επίσης δίνω και την αντίστοιχη τιμή που προκύπτει από το μοντέλο των Black & Scholes χρησιμοποιώντας ως volatility την τιμή που εκτίμησα μέσω της historical volatility. Θα θεωρήσουμε ότι τα option είναι at-the-money δηλαδή ότι η τιμή εκτέλεσης είναι ίση με την τρέχουσα τιμή. Το GARCH μοντέλο που χρησιμοποίησα για την εκτίμηση των παραμέτρων είναι τάξης (2,2). Ο αριθμός των επαναλήψεων-προσομοιώσεων της διαδικασίας λήφθηκε για n=10.000. Όπως παρατηρούμε από το σχετικό πίνακα οι εκτιμήσεις με τη μέθοδο Monte Carlo μέσω της stochastic volatility είναι σχεδόν όμοιες με αυτές που προκύπτουν από τον τύπο των Black & Scholes. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η μέθοδος αυτή λειτουργεί σωστά και σε ορισμένες

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

περιπτώσεις αποτελεί και την πλέον κατάλληλη. Ο λόγος είναι ότι δεν θεωρούμε σταθερή την volatility αλλά ότι μεταβάλλεται με το χρόνο γεγονός που δείχνει περισσότερο ορθολογικό.

Πίνακας 6.2

Option	Monte Carlo μέθοδος με historical volatility	Monte Carlo μέθοδος με stochastic volatility	Black-Scholes τιμή με εκτίμηση της historical volatility.
USD-DEM	0,0936	0,0935	0,0934
USD-GBP	0,0330	0,0334	0,0334
USD-JPY	6,4509	6,4672	6,4569
USD-FRF	0,3087	0,3131	0,3131
USD-CAD	0,0874	0,0869	0,0870
USD-ESP	8,0871	7,9454	7,9454

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Κεφάλαιο 7

Εφαρμογή Stochastic Volatility και σύγκριση με πραγματικές τιμές

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τις μεθόδους που αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους σχετικά με την αποτίμηση των options χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά όμως πραγματικές τιμές για να κάνουμε τη σύγκριση. Πιο συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε τον δείκτη S&P 500 από το αμερικανικό χρηματιστήριο με ημερήσιες τιμές μετοχών τις τελευταίας εικοσαετίας . Τα στοιχεία του δείκτη αυτού παρατίθενται στο παράρτημα. Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε τις ρουτίνες του προγράμματος MATLAB για εκτίμηση της τιμής των options με τη μέθοδο του Black-Scholes και με Stochastic Volatility από προηγούμενες ενότητες. Η σύγκριση των δύο μεθόδων τόσο μεταξύ τους όσο και με τις πραγματικές τιμές θα γίνει χρησιμοποιώντας τις πραγματικές τιμές των options που παρατηρήθηκαν κατά το χρονικό διάστημα Ιουνίου- Οκτωβρίου του 2001 σε μετοχές του ιδίου δείκτη (S&P 500). Τα δεδομένα αυτά επίσης εμφανίζονται στο παράρτημα.

Για την εκτίμηση της τιμής του Black-Scholes χρησιμοποιείται η εξής ρουτίνα της MATLAB : **blsprice(S_0, K, r, T, vol)** οι παράμετροι της οποίας έχουν αναλυθεί στην παρούσα ενότητα.

Η σύγκριση της εκτίμησης με τις παρατηρηθείσες τιμές είναι αναγκαία για να διαπιστώσουμε κατά πόσο η αποτίμηση options με τη μέθοδο της στοχαστικής μεταβλητότητας μας δίνει τα ίδια αποτελέσματα με αυτά της αγοράς. Είναι γνωστό πως η αγορά με την ευρύτερη έννοια του όρου χρησιμοποιεί τη λεγόμενη implied volatility για την αποτίμηση των options, η οποία και έχει αναλυθεί στην παρούσα ενότητα. Με το ακόλουθο παράδειγμα εξετάζουμε εάν η δεύτερη αυτή μέθοδος ανταποκρίνεται ή όχι στην πραγματικότητα.

Ξεκινάμε την ανάλυση μας με τρία call options G, F και H με αντίστοιχα strike prices k1=1225, k2=1200 και k3=1250, με χρονικό ορίζοντα από 1/6/2001 έως 1/10/2001. Η εκτίμηση μας περιλαμβάνει τις 50 τελευταίες ημέρες έως τη λήξη τους, δηλαδή από 24/7/2001 έως 1/10/2001. Οι πραγματικές τιμές στις δύο αυτές ημερομηνίες καθώς και τα υπόλοιπα στοιχεία παρουσιάζονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα

TIME	G option (K=1225)	F option (K=1200)	H option (K=1250)
24/7/2001	26.3	38.2	17.9
1/10/2001	0.1	0.25	0.22

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

Από το δείκτη τιμών μετοχών S&P 500 και μετακινούμενοι ένα χρόνο πίσω παίρνουμε τις τιμές που μας ενδιαφέρουν για την εκτίμηση.

24/7/2000	$S_0 = 1464.29$
24/7/2001	$S_0 = 1171.65$

(όπου S_0 η τιμή του δείκτη). Χρησιμοποιώντας τις υπάρχουσες από την προηγούμενη ενότητα ρουτίνες της MATLAB εκτιμούμε την τιμή των τριών option για την ημέρα 1/10/2001 με τη μέθοδο του Black-Scholes και τη μέθοδο του Stochastic volatility. Γνωρίζουμε ότι οι πραγματικές τιμές έχουν υπολογισθεί με τη μέθοδο του implied volatility. Οι παράμετροι που χρησιμοποιούμε στις εντολές της MATLAB είναι τα strike prices K, οι τιμή του δείκτη ένα χρόνο πριν την εκτίμηση μας S_0 την 24/7/2000, θέτουμε T=1 και Nsteps=50. Η διαδικασία επαναλήφθηκε 10.000 φορές. Το πρόγραμμα έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα

Μέθοδος	G option	F option	H option
Stochastic volatility	Price=0.0926	Price=0.2231	Price=0.2175
	(0.0232 , 0.1220)	(0.1924 , 0.2544)	(0.2038 , 0.2311)
Black-Scholes	Price=0.21	Price=0.2432	Price=0.2095

Ο πίνακας δείχνει τις ακριβείς τιμές των εκτιμήσεων για την ημέρα 1/10/2001 καθώς και τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης. Αν παραθέσουμε και τις πραγματικές τιμές των options η σύγκριση θα είναι σαφώς ευκολότερη. Από τον συγκεκριμένο πίνακα που εμφανίσαμε προηγουμένως έχουμε

Real price G option = 0.1
Real price F option = 0.25
Real price H option = 0.22

Η σύγκριση τώρα είναι εμφανής. Τα αποτελέσματα αυτά είναι ενδεικτικά των μεθόδων που ακολουθήθηκαν. Πρέπει να τονίσουμε πως στην προσπάθειά μας για

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS

καλύτερη εκτίμηση χρησιμοποιήσαμε τις διακυμάνσεις (st.dev) των αποδόσεων του δείκτη (returns). Πιο συγκεκριμένα έχοντας την χρονοσειρά του δείκτη των τιμών μετοχών S&P 500 βρήκαμε τις αποδόσεις του δείκτη και εν συνεχεία τη διακύμανση αυτών. Για περισσότερη ακρίβεια στην εκτίμηση κάναμε διάφορες δοκιμές παίρνοντας διακυμάνσεις έτους, τριμήνων κλπ. Τα αποτελέσματα δεν διαφοροποιήθηκαν σημαντικά, γεγονός αναμενόμενο αν αναλογιστούμε πως και ο εν λόγω δείκτης δεν παρουσιάζει μεγάλες διαφοροποιήσεις στις τιμές του ειδικά τα τελευταία χρόνια.

Προχωρώντας τώρα στη σύγκριση έχουμε να επισημάνουμε ότι και οι τρεις μέθοδοι (οι δύο που εξετάζονται και η τρίτη που χρησιμοποιεί η αγορά) είναι πάρα πολύ κοντά από πλευράς αποτελεσμάτων. Οι αποκλίσεις που παρατηρούνται μεταξύ εκτιμήσεων και πραγματικών τιμών είναι πολύ μικρές και αναμενόμενες. Μπορούμε συνεπώς να συμπεράνουμε ότι οι δύο μέθοδοι αποτίμησης options σχεδόν συμβαδίζουν με την αγορά. Οι δοκιμές που έγιναν στο πρόγραμμα υποδεικνύουν ότι τελικά η μέθοδος της stochastic volatility είναι συνεπής με την αγορά σε γενικές γραμμές. Από άποψη αποτελεσματικότητας και ακρίβειας είναι αρκετά κοντά στις δύο άλλες μεθόδους που χρησιμοποιούνται ως επί το πλείστον από την αγορά. Το γεγονός αυτό είναι ίσως και μια επιβεβαίωση του μαθηματικού υπόβαθρου της μεθόδου αυτής, η οποία όπως προαναφέρθηκε και στην αρχή αυτής της ενότητας επινοήθηκε ακριβώς για να ερμηνεύσει καλύτερα την αγορά.

Στο σημείο αυτό αξίζει όμως να τονίσουμε και μία άλλη παράμετρο στην ανάλυσή μας. Από τον πίνακα με τις τιμές των options και ύστερα από δοκιμές στις ρουτίνες τις MATLAB διαπιστώθηκε πως σε κάποιες περιπτώσεις οι τιμές των μεθόδων Black-Scholes και stochastic volatility αν και συμφωνούσαν μεταξύ τους απείχαν από τις πραγματικές τιμές. Όπως είναι γενικά αποδεκτό, οι τιμές των options είναι ιδιαίτερα ευμετάβλητες και επηρεάζονται από ένα μεγάλο αριθμό παραγόντων. Ίσως και για αυτό το λόγο υπήρξε και αυτή η απόκλιση σε κάποια από τα options με τα οποία εργαστήκαμε. Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι η αγορά γενικότερα κινείται με τους δικούς της ρυθμούς παρά τις όποιες προσπάθειες <<μαθηματικοποίησης>> της. Μία άλλη εξήγηση είναι πως για να ερμηνευθούν κάποιες αποκλίσεις στις τιμές μετοχών και options πρέπει να υπάρχει πλήρης πληροφόρηση γύρω από τις γενικές οικονομικές συνθήκες που επικρατούν κατά καιρούς στην αγορά. Στο γεγονός αυτό έγκειται εξάλλου και οι αδυναμία πολλών ερευνητών να εξηγήσουν κάποιες διαφοροποιήσεις της αγοράς ειδικά σε περιόδους κρίσεων.

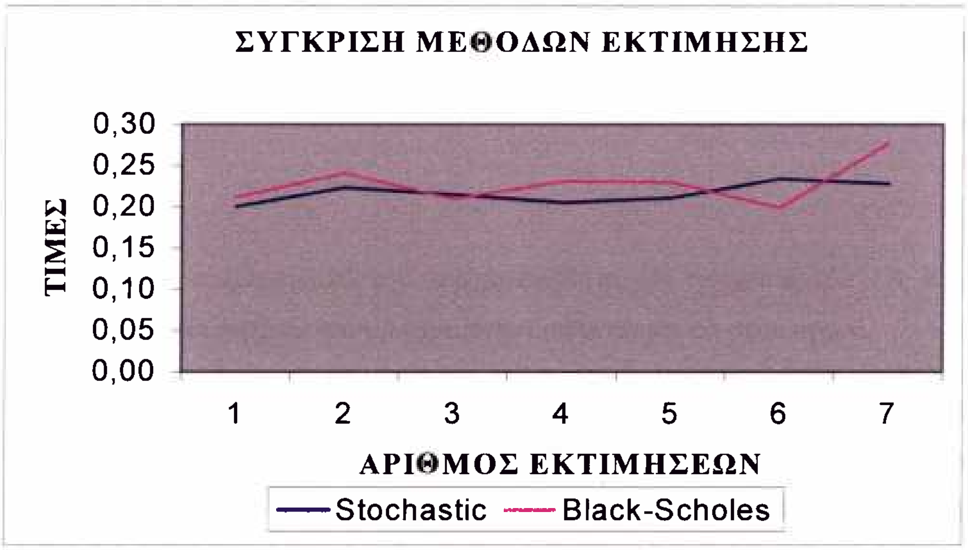
Το γενικό συμπέρασμα της ανάλυσης μας, όπως αυτή παρουσιάστηκε στην ενότητα αυτή είναι ότι η μεταβλητότητα όπως κι αν αυτή εμφανίζεται αποτελεί έναν

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

από τους σημαντικότερους παράγοντες για την αποτίμηση και την ανάλυση των options. Για αυτό το λόγο εξάλλου έχουν επινοηθεί τόσοι διαφορετικοί τρόποι μέτρησης και χρησιμοποίησης της στην προσπάθεια να ερμηνευτεί και να εκτιμηθεί η τιμή των options.

Τα παραπάνω συμπεράσματα γίνονται περισσότερο κατανοητά χρησιμοποιώντας δύο γραφήματα. Το πρώτο απεικονίζει τη σύγκριση των δύο μεθόδων εκτίμησης, δηλαδή τις εκτιμήσεις που δίνουν οι μέθοδοι της Stochastic volatility και του Black-Scholes.

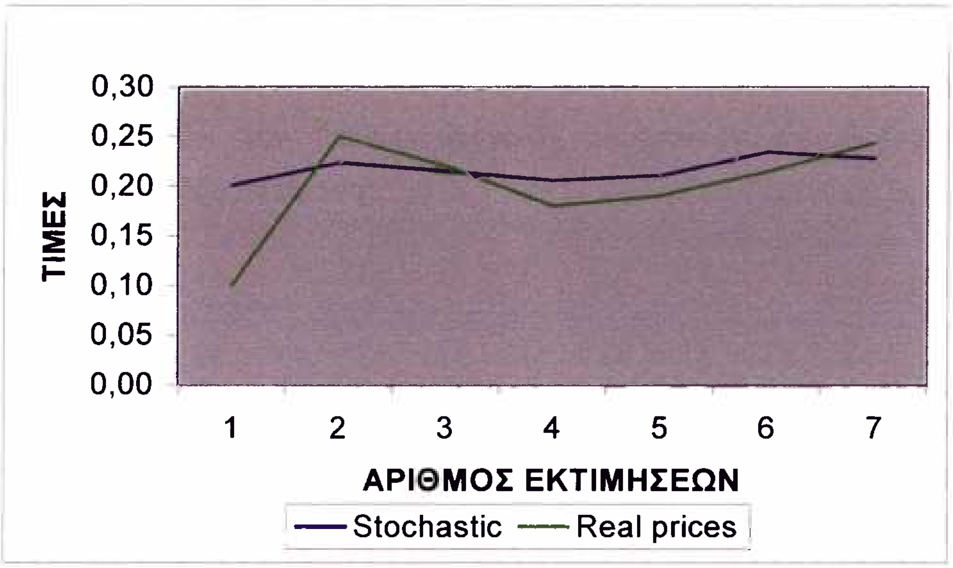
Διάγραμμα 6.7



Επαληθεύεται και διαγραμματικά η σύγκλιση των δύο μεθόδων.

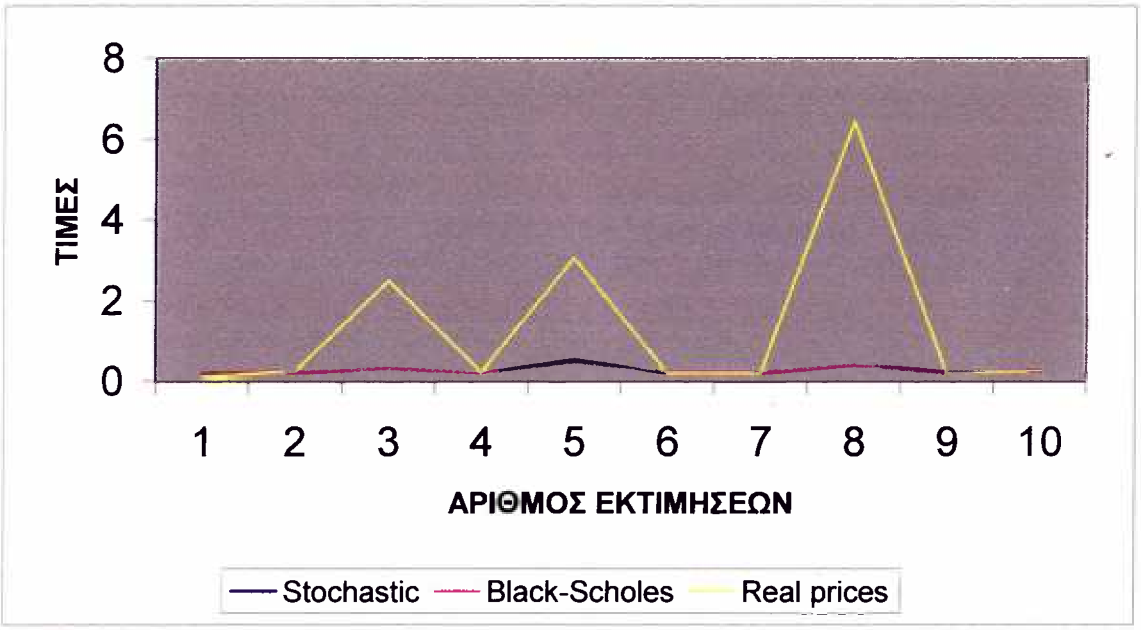
Στο επόμενο διάγραμμα γίνεται η σύγκριση των εκτιμήσεων της μεθόδου Stochastic volatility με τις πραγματικές τιμές των options, όπως αυτές παρατηρήθηκαν στην αγορά. Το διάγραμμα δεν περιλαμβάνει τα options εκείνα για τα οποία όπως προαναφέραμε υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ των τιμών τους και των εκτιμήσεων των δύο μεθόδων, καθώς όπως συμπεράναμε από την έρευνα μας οι αποκλίσεις αυτές είναι προϊόν μάλλον ατελούς πληροφόρησης παρά αδυναμίας των μεθόδων εκτίμησης.

Διάγραμμα 6.8



Όπως είναι φανερό η εκτίμηση από την πραγματικότητα δεν απέχει πολύ. Οι δύο μέθοδοι οδηγούν στα ίδια περίπου αποτελέσματα και μάλιστα κοντά στην αγορά.

Διάγραμμα 6.9



Στο διάγραμμα 6.9 έχουμε συμπεριλάβει κάποια από τα options των οποίων οι εκτιμήσεις απέχουν πάρα πολύ από την αγορά, για να δείξουμε αυτήν ακριβώς την απόκλιση από τις πραγματικές τιμές. Το μέγεθος της απόκλισης αυτής είναι φανερό ότι υποδεικνύει την ύπαρξη εξωγενών παραγόντων που δεν έχουμε συμπεριλάβει στις μεθόδους εκτίμησης.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

- **Ανάθεση** Assignment

Ειδοποίηση από την επιτροπή εκκαθάρισης λογαριασμών επί των παραγώγων προς τον πωλητή δικαιώματος ότι το δικαίωμα έχει εξασκηθεί από τον αγοραστή.

- **Άνοιγμα** Spread

Μία σύνθετη θέση σε παράγωγα, που αποτελείται από μία θέση αγοράς ενός συμβολαίου και μία θέση πώλησης ενός παρόμοιου συμβολαίου.

- **Ανοικτή θέση** Open position

Η αποτύπωση ως προς τον αριθμό των συμβολαίων ή την ποσότητα της υποκείμενης αξίας, του συνόλου των δικαιωμάτων ή υποχρεώσεων οποιουδήποτε συναλλασσομένου, που απορρέουν από πράξεις στα παράγωγα.

- **Ανοικτή Πώληση** Short selling

Συναλλαγή κατά την οποία ο επενδυτής δανείζεται μετοχές και τις πουλάει σε τρίτο αναλαμβάνοντας έτσι την υποχρέωση να τις αγοράσει στο μέλλον για να τις επιστρέψει στο δανειστή. Με τον τρόπο αυτό πραγματοποιεί κέρδος ή ζημιά ανάλογα με τις τιμές που πούλησε και κατόπιν αγόρασε τις μετοχές

- **Αντιστάθμιση κινδύνου** Hedging

Συναλλαγή κατά την οποία ένας επενδυτής προσπαθεί να προστατεύσει μία θέση του στην υποκείμενη αγορά χρησιμοποιώντας μία αντίθετη θέση στην αγορά των παραγώγων.

- **Αξία χρόνου** Time value

Η διαφορά της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης μείον την εσωτερική του αξία.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS · ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ · ATHENS

- **Βάση** Basis

Η τιμή της υποκείμενης αξίας ενός future μείον την τιμή του future. Καθώς το future πλησιάζει προς την ημέρα λήξης του, η βάση συγκλίνει στο μηδέν.

- **Δανεισμός Τίτλων** Stock lending

Συμφωνίες μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων (του δανειζόμενου και του δανειστή) με τις οποίες η κυριότητα μετοχών που βρίσκονται στην κατοχή του δανειστή μεταβιβάζεται στο δανειζόμενο έναντι ποσού που εξαρτάται από το χρόνο μέχρι την επιστροφή της κυριότητας των μετοχών στο δανειστή και προσδιορίζεται από την τιμή δανεισμού η οποία δίνεται σε μορφή ετήσιου επιτοκίου.

- **Δικαίωμα με θετική εσωτερική αξία** In-the-money option

Ένα δικαίωμα αγοράς (πώλησης) το οποίο αν εξασκηθεί θα αποφέρει αξία στον κάτοχό του, επειδή η τιμή της υποκείμενης αξίας είναι μεγαλύτερη (μικρότερη) από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος.

- **Δικαίωμα με μηδενική εσωτερική αξία** Out-of-the-money option

Ένα δικαίωμα αγοράς (πώλησης) το οποίο αν εξασκηθεί δεν θα αποφέρει αξία στον κάτοχό του, επειδή η τιμή της υποκείμενης αξίας είναι μικρότερη (μεγαλύτερη) από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος.

- **Δικαίωμα προαίρεσης αμερικανικού τύπου** American option

Ένα δικαίωμα προαίρεσης που μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημέρα λήξης του συμβολαίου.

- **Δικαίωμα προαίρεσης ευρωπαϊκού τύπου** European option

Ένα δικαίωμα προαίρεσης που μπορεί να εξασκηθεί μόνο κατά την ημέρα λήξης του συμβολαίου.

- **Δικαίωμα στην τρέχουσα τιμή** At-the-money option

Από μία σειρά δικαιωμάτων αγοράς (ή πώλησης) με την ίδια ημέρα λήξης και διαφορετικές τιμές εξάσκησης, το δικαίωμα αγοράς (ή πώλησης) εκείνο του οποίου η τιμή εξάσκησης βρίσκεται πιο κοντά στην τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS · ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

➢ **Δικαιώματα Προαίρεσης** Options

Συμφωνίες μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων (ενός αγοραστή και ενός πωλητή) που δίνουν στον αγοραστή το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει από (αν πρόκειται για δικαίωμα αγοράς - Call) ή να πουλήσει στον (αν πρόκειται για δικαίωμα πώλησης - Put) πωλητή συγκεκριμένη ποσότητα (το μέγεθος του συμβολαίου) της υποκείμενης αξίας σε προκαθορισμένη μελλοντική ημερομηνία (η ημέρα λήξης του συμβολαίου) σε προκαθορισμένη τιμή (η τιμή εξάσκησης).

➢ **Διωνυμικό μοντέλο** Binomial model

Μέθοδος αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης, που βασίζεται στην υπόθεση ότι σε κάθε χρονική στιγμή, η τιμή της υποκείμενης αξίας ή του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης, μπορεί να πάρει μόνο δύο δυνατές τιμές.

➢ **Εκκαθάριση με ρευστά διαθέσιμα** Cash settlement

Όρος σε ορισμένα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και δικαιώματα προαίρεσης, που καθορίζει ότι η εκκαθάριση δεν γίνεται με φυσική παράδοση της υποκείμενης αξίας αλλά με μεταβίβαση χρηματικού ποσού, όπως καθορίζεται από αλγόριθμο.

➢ **Εκκαθάριση Συμβολαίου Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ-future) με φυσική παράδοση** Settlement by physical delivery

Κατά την λήξη ενός future που εκκαθαρίζεται με φυσική παράδοση, το συμβόλαιο εκπληρούται με τον πωλητή να παραδίδει στον αγοραστή την υποκείμενη αξία και τον αγοραστή να καταβάλει στον πωλητή το δραχμικό ισοδύναμο της τελικής τιμής εκκαθάρισης του future.

➢ **Εντολή με όριο** Limit order

Εντολή βούλησης αγοράς ή πώλησης που διαβιβάζεται προς την αγορά, η οποία προσδιορίζει τιμή πέραν της οποίας ο αγοραστής δεν επιθυμεί να αγοράσει ή ο πωλητής να πουλήσει, αντίστοιχα.

➢ **Εξάσκηση** Exercise

Διαδικασία κατά την οποία ένα δικαίωμα αγοράς ή ένα δικαίωμα πώλησης χρησιμοποιείται από τον αγοραστή του δικαιώματος για να αγοράσει από ή να πουλήσει

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ATHENS

στον πωλητή του δικαιώματος την υποκείμενη αξία στην τιμή εξάσκησης του δικαιώματος.

➤ **Εξισορροπητική κερδοσκοπία** Arbitrage

Ταυτόχρονη αγορά και πώληση της ίδιας ή ισοδύναμων αξιών σε σημαντικά διαφορετικές τιμές που αποφέρει κέρδος δίχως κίνδυνο.

➤ **Εσωτερική αξία** Intrinsic value

Για ένα δικαίωμα αγοράς, είναι η διαφορά της τρέχουσας τιμής της υποκείμενης αξίας μείον την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, αν αυτή είναι θετική και μηδέν, αν αυτή είναι αρνητική. Για ένα δικαίωμα πώλησης, είναι η διαφορά της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος μείον την τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας, αν αυτή είναι θετική και μηδέν, αν αυτή είναι αρνητική.

➤ **Καθημερινή αποτίμηση** Mark-to-market

Διαδικασία που χρησιμοποιείται για τα futures κατά την οποία στο τέλος κάθε ημέρας οι επενδυτές των οποίων οι θέσεις (αγοράς ή πώλησης) σημείωσαν ζημιές πληρώνουν τις ζημιές τους αυτές στους επενδυτές των οποίων οι θέσεις σημείωσαν κέρδη.

➤ **Μη προστατευμένη πώληση δικαιώματος αγοράς** Uncovered call

Στρατηγική σύμφωνα με την οποία ο επενδυτής πουλάει ένα δικαίωμα αγοράς, χωρίς να κατέχει την υποκείμενη αξία.

➤ **Μη συστηματικό ρίσκο** Unsystematic risk

Το ρίσκο ενός τίτλου, που σχετίζεται με παράγοντες που συνδέονται με αυτόν και όχι με την αγορά ή την οικονομία σαν σύνολο.

➤ **Μονάδα βάσης** Basis point

Το ένα εκατοστό της ποσοστιαίας μονάδας (0,01%). Χρησιμοποιείται για την αναφορά μικρών μεταβολών σε επιτόκια.

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

- **Μοντέλο Black-Scholes** Black - Scholes model

Μοντέλο που αναπτύχθηκε από τους Fisher Black και Myron Scholes το 1973 και αποτελεί την κλασική μέθοδο αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης, ευρωπαϊκού τύπου.

- **Παραδοτέα ομόλογα** Deliverable bonds

Τα ομόλογα που καθορίζονται από το χρηματιστήριο παραγώγων ως αυτά των οποίων τα χαρακτηριστικά προσομοιάζουν επαρκώς το συνθετικό ομόλογο, το οποίο είναι η υποκείμενη αξία ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ-Future), που εκκαθαρίζεται με φυσική παράδοση. Κατά τη λήξη του συμβολαίου, οι πωλητές των future παραδίδουν στους αγοραστές ομόλογα από το καλάθι των παραδοτέων ομολόγων.

- **Περιθώριο ασφάλειας** Margin

Χρηματικά ποσά ή αξίες δεσμευμένες υπέρ της εταιρίας εκκαθάρισης σαν ενέχυρο για την κάλυψη ζημιών από θέσεις σε παράγωγα προϊόντα.

- Προστατευμένη πώληση **δικαιώματος αγοράς** Covered call

Πώληση δικαιώματος αγοράς με παράλληλη κατοχή της υποκείμενης αξίας.

- **Προθεσμιακό συμβόλαιο** Forward

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο αποτελεί μια συμφωνία που επιτεύχθηκε σε μια χρονική στιγμή για την παράδοση ενός προϊόντος σε μια συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία, σε μια τιμή που καθορίστηκε κατά τον χρόνο της σύμβασης.

- **Ρευστότητα** Liquidity

Η ικανότητα να αγοράζονται ή να πωλούνται μεγάλες ποσότητες μίας χρηματοοικονομικής αξίας χωρίς να επηρεάζεται η τιμή της.

- **Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ)** Futures

Συμβόλαια σύμφωνα με τα οποία οι αντισυμβαλλόμενοι (ένας αγοραστής και ένας πωλητής) αναλαμβάνουν την υποχρέωση να αγοράσουν ή να πουλήσουν συγκεκριμένη ποσότητα (το μέγεθος του συμβολαίου) της υποκείμενης αξίας σε προκαθορισμένη μελλοντική ημερομηνία (η ημέρα **λήξης του** συμβολαίου) σε

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

προκαθορισμένη τιμή και τα οποία συναλλάσσονται σε κάποια οργανωμένη χρηματιστηριακή αγορά και υπόκεινται σε καθημερινή διαδικασία αποτίμησης.

- **Συνθετικό δικαίωμα αγοράς** Synthetic call

Ο συνδυασμός αγοράς ενός δικαιώματος πώλησης και πώλησης ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης με την ίδια υποκείμενη αξία και το ίδιο μέγεθος συμβολαίου, που προσομοιάζει τη συμπεριφορά ενός δικαιώματος αγοράς. Εναλλακτικά, η αγορά ενός δικαιώματος πώλησης μπορεί να συνδυαστεί με την ανοιχτή πώληση της υποκείμενης αξίας.

- **Συνθετικό δικαίωμα πώλησης** Synthetic put

Ο συνδυασμός αγοράς ενός δικαιώματος αγοράς και πώλησης ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης με την ίδια υποκείμενη αξία και το ίδιο μέγεθος συμβολαίου, που προσομοιάζει τη συμπεριφορά ενός δικαιώματος πώλησης. Εναλλακτικά, η αγορά ενός δικαιώματος αγοράς μπορεί να συνδυαστεί με την ανοιχτή πώληση της υποκείμενης αξίας.

- **Συνθετικό ομόλογο** Synthetic bond - notional bond

Εικονικό ομόλογο που χρησιμοποιείται σαν υποκείμενη αξία ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης, όπου και καθορίζονται τα χαρακτηριστικά του.

- **Συνθετικό συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης** Synthetic futures

Ο συνδυασμός αγοράς ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης με την ίδια υποκείμενη αξία, την ίδια τιμή εξάσκησης και το ίδιο μέγεθος συμβολαίου, που προσομοιάζει τη συμπεριφορά ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης.

- **Συντελεστής βήτα** Beta factor

Μέτρο της ευαισθησίας της αξίας ενός τίτλου ή χαρτοφυλακίου στις διακυμάνσεις της αγοράς σαν σύνολο.

- **Συντελεστής τιμής παραδοτέου ομολόγου** Price factor of a deliverable bond

Κατά τη λήξη ενός future, που εκκαθαρίζεται με φυσική παράδοση ομολόγου, οι πωλητές των future παραδίδουν στους αγοραστές ομόλογα από το καλάθι των παραδοτέων ομολόγων. Για κάθε παραδοτέο ομόλογο από αυτό το καλάθι, το χρηματιστήριο παραγώγων καθορίζει ένα συντελεστή τιμής, που χρησιμοποιείται για

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

την προσαρμογή της αξίας του παραδοτέου ομολόγου που θα καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή, με βάση την τελική τιμή εκκαθάρισης του future.

- **Συστηματικό ρίσκο** Systematic risk

    Το ρίσκο ενός τίτλου που σχετίζεται με την αγορά ή την οικονομία σαν σύνολο και όχι με παράγοντες που συνδέονται με αυτόν.

- **Τίμημα δικαιώματος** Option premium

    Το ποσό που οφείλει να καταβάλει ένας συναλλασσόμενος για την αγορά δικαιώματος προαίρεσης.

- **Τράπεζα θεματοφυλακής** Custodian bank

    Τα πιστωτικά ιδρύματα μέσω των οποίων διενεργείται ο ημερήσιος διακανονισμός πράξεων επί παραγώγων και διατηρούνται περιθώρια ασφάλειας ανά επενδυτή.

- **Υποκείμενη αγορά** cash market - underlying market

    Η αγορά στην οποία διαπραγματεύεται η χρηματοοικονομική αξία στην οποία βασίζεται ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης ή ένα δικαίωμα προαίρεσης.

- **Φέρον κόστος** Cost of carry

    Το κόστος που συνδέεται με τη διατήρηση και διαφύλαξη ενός προϊόντος. Για χρηματοοικονομικά προϊόντα το κόστος αυτό περιλαμβάνει τον τόκο, που δεν εισπράχθηκε λόγω της δέσμευσης χρημάτων. Για φυσικά προϊόντα, το κόστος αυτό περιλαμβάνει δαπάνες αποθήκευσης, ασφάλισης και φθοράς.

- **Φέρουσα εξισορροπητική κερδοσκοπία** Cash and carry arbitrage

    Δίχως κίνδυνο κερδοσκοπική θέση, που λαμβάνει χώρα όταν η τιμή ενός future είναι μεγαλύτερη από την τιμή της υποκείμενης αξίας του, συν το φέρον κόστος. Ο κερδοσκόπος δανείζεται στα τρέχοντα επιτόκια διαθεσίμων, για να χρηματοδοτήσει την αγορά της υποκείμενης αξίας και, ταυτόχρονα, πουλάει το future.

UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS ATHENS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Baxter M. & Rennie A. 'Financial Calculus' , Cambridge University Press, United Kingdom 1997
2. Brandimarte P. 'Numerical Methods in Finance' John Wiley & Sons, New York, 2002
3. Brockwell P.J. & Davis R.A. 'Introduction to Time Series and Forecasting' , Springer , New York , 1996
4. Clewlow L. & Strickland C. 'Implementing Derivatives Models' , John Wiley & Sons, New York ,1998
5. Hull J. 'Options, Futures and other Derivatives' Prentice-Hall, 1993
6. Nelken Israel 'Volatility in the Capital Markets' Glenlake Publishing Company, 1997
7. Noh J. , Engle R.F. , Kane A. 'Forecasting Volatility and Option Prices of the S&P 500 Index' , The Journal of Derivatives , 1994
8. Δελλαπόρτας Π. 'Προσομοίωση και Στοχαστικά Μοντέλα' , σημειώσεις παραδόσεων, 1994
9. Καραθανάσης Γ.Α. 'Χρηματοοικονομική Διοίκηση και Χρηματιστηριακές Αγορές', Μπένος , Αθήνα ,1999
10. Συρράκος Ε. 'Χρηματιστηριακά και Επιτοκιακά Παράγωγα – Αποτίμηση και Εφαρμογές' Conceptum Αθήνα, 2000

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] Πρόκειται για το μοντέλο που αναπτύχθηκε από τους Cox, Ross και Rubenstein (J. Cox , S. Ross and M. Rubenstein, "Option Pricing: A Simplified Approach", Journal of Financial Economics 7, Sept. 1979, pp. 229 – 263).

[2] Το κεφάλαιο αυτό ουσιαστικά αποτελεί μια περίληψη των πανεπιστημιακών παραδόσεων του κ. Δελλαπόρτα στο αντίστοιχο μάθημα «Προσομοίωση και Στοχαστικά μοντέλα»
Βλ. Π. Δελλαπόρτας 'Προσομοίωση και Στοχαστικά Μοντέλα' Σημειώσεις Παραδόσεων ,1994

[3] Η σειρά ARCH δημιουργήθηκε από τον Engle (1982) και γενικεύθηκε σε GARCH από τον Bollerslev (1986)

[4] Οι ρουτίνες που περιέχονται στο συγκεκριμένο toolbox έχουν κατασκευαστεί από τον Kevin Sheppard και είναι διαθέσιμες στο internet στη διεύθυνση http://econ.ucsd.edu/~ksheppar/ucsd_garch.htm

ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

80025 75540
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS & BUSINESS
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ